TD 8 : Espaces de Hilbert

David Hilbert (1862-1943) est un mathématicien allemand, considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de son époque. Il y a tellement de choses à dire sur lui qu'on se contentera de l'épitaphe qui figure sur sa tombe (mais vous pouvez aller voir sur Wikipédia ou ailleurs pour en savoir plus !) :

Wir müssen wissen, wir werden wissen

Exercice 1 : Lemme de Zorn et bases Hilbertiennes

On rappelle qu'une base Hilbertienne d'un espace de Hilbert H est une famille orthonormée totale. On fixe un espace de Hilbert H.

1. On suppose H séparable. Montrer que H possède une base Hilbertienne dénombrable.
2. On ne suppose plus *a priori* H séparable.
   a) Montrer que H possède une famille orthonormée maximale pour l'inclusion.
   b) Montrer qu'une telle famille est une base Hilbertienne.

Exercice 2 : Adjoints

Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $T : H \to H$ linéaire continue.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue, notée T^* et appelée adjoint de T, telle que pour tous $x, y \in H, (Tx, y) = (x, T^*y)$.
2. a) Montrer que $T^{**} = T$.
   b) Montrer que $||T|| = ||T^*||$.
   c) Montrer que $||TT^*|| = ||T^*T|| = ||T||^2$.
3. a) Montrer que $\ker(T^*) = (\mathrm{Im}(T))^\perp$.
   b) En déduire que $\overline{\mathrm{Im}(T)} = (\ker T^*)^\perp$.
4. On suppose que $T^* = T$ (on dit que T est auto-adjoint) et que $H \neq \{0\}$. On supposera de plus que H est réel. Montrer que

$$||T|| = \sup\{|(Tx, x)| \mid x \in H, ||x|| = 1\}$$

5. (Un exemple). On se place dans l'espace de Hilbert (complexe) $L^2(\mathbb{R}^d)$. Soit $K \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. On définit une application linéaire T_K sur H en posant, pour $f \in H$ et pour presque tout x :

$$T_K f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y) dy$$

a) Vérifier que T_K est une application linéaire continue.
b) Calculer son adjoint. On l'exprimera sous la forme T_L pour un L bien choisi.

Exercice 3 : Théorème de Lax-Milgram

Soit H un espace de Hilbert réel et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinéaire continue coercive i.e. telle qu'il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour tous x et $y \in H$,

$$|a(x,y)| \leq C||x||\,||y|| \text{ (continuité) } \text{ et } a(x,x) \geq \alpha ||x||^2 \text{ (coercivité)}$$

.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $T : H \to H$ telle que pour tous $x, y \in H, a(x,y) = (Tx, y)$.
2. Montrer que T est injective.
3. Montrer que $\operatorname{Im} T$ est fermé.
4. Montrer que $\operatorname{Im} T$ est dense dans H. En déduire que T est un isomorphisme et que T^{-1} est continue.
5. En déduire que pour toute forme linéaire continue $L : H \to \mathbb{R}$ il existe un unique $x \in H$ telle que pour tout $y \in H$, $a(x,y) = L(y)$.
6. On suppose dans cette question que a est symétrique et soit $L : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Montrer que l'unique x de la question précédente est caractérisé par :

$$J(x) = \min_{y \in H} J(y)$$

où $J(y) = \frac{1}{2}a(y,y) - L(y)$.

Exercice 4 : Un théorème ergodique

Soit H un espace de Hilbert et soit $T : H \to H$ linéaire continue telle que $||T|| \leq 1$. On note P le projecteur orthogonal sur $\ker(T - \mathrm{Id})$. On pose

$$S_n \coloneqq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k$$

Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $x \in H, S_n(x) \to P(x)$.

1. Montrer que l'ensemble $F \coloneqq \{x \in H, S_n(x) \to P(x)\}$ est fermé.
2. Montrer que $\ker(T - \mathrm{Id}) \subset F$.
3. Montrer que $\ker(T - \mathrm{Id}) = \ker(T^\star - \mathrm{Id})$.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(T - \mathrm{Id}) \subset F$.
5. Conclure.

Pour aller plus loin

Exercice 5 : Convergence faible

Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une suite (x_n) converge faiblement vers $x \in H$ si pour tout $y \in H$, $(x_n, y) \to (x, y)$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H et $x \in H$.

1. On suppose que $x_n \to x$. Montrer que (x_n) converge faiblement vers x.
2. On suppose que pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, $(x_i, x_j) = \delta_{i,j}$. Montrer que (x_n) converge faiblement vers 0.
3. On suppose que (x_n) converge faiblement vers x. Montrer que $||x|| \leq \liminf ||x_n||$.
4. On suppose que (x_n) converge faiblement vers x et que $\limsup ||x_n|| \leq ||x||$. Montrer que $x_n \to x$.
5. On suppose que H est séparable et que (x_n) est bornée. Montrer que l'on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement.
6. On suppose que (x_n) converge faiblement vers x. Montrer que (x_n) est bornée. *Indication : on pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus*

Exercice 6 : Matrices de Gram et ...

Soit E un espace de Hilbert réel et $x_1, \dots, x_p \in E$. On note $G(x_1, \dots, x_p)$ le déterminant de Gram de cette famille, à savoir,

$$G(x_1, \dots, x_p) = \left| (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq p} \right|$$

1. Montrer que $G(x_1, \dots, x_p) = 0 \iff (x_1, \dots, x_p)$ est liée.
2. On suppose que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre et on note $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F. On note $M = (m_{ij})$ la matrice de changements de base :

$$x_j = \sum_{i=1}^{p} m_{ij} e_i$$

.

   a) Montrer que $G(x_1, \dots, x_p) = (\det M)^2$.
   b) Soit $x \in E$. Montrer

$$d(x, F)^2 = \frac{G(x, x_1, \dots, x_p)}{G(x_1, \dots, x_p)}$$

   Indication : on pourra utiliser le projeté orthogonal de x sur F

3. **Un calcul**. On pose $E = L^2(]0,1[)$ et pour $r \geq 0$, on note $f_r : x \in]0,1[\mapsto x^r, f_r \in E$. Soient $r_1, \dots, r_p \geq 0$. Montrer que $G(f_{r_1}, \dots, f_{r_p})$ est le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \left(\frac{1}{r_i + r_j + 1} \right)_{1 \leq i,j \leq p}$$

   On admet que

$$\det(A) = \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{2r_j + 1} \prod_{j<k} \left(\frac{r_j - r_k}{r_j + r_k + 1} \right)^2$$

Exercice 7 : ... Théorème de Müntz

Cet exercice utilise de façon substantielle les résultats de l'exercice précédent. On note toujours $E = L^2(]0,1[)$ et pour $r \geq 0$, $f_r : x \in]0,1[\mapsto x^r$. On se donne une suite de réels strictement croissante $(r_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et on notera $F_p = \text{Vect}(f_{r_0}, \ldots, f_{r_p})$. On souhaite étudier une CNS pour que la famille (f_{r_p}) soit totale, i.e. $E = \overline{\text{Vect}(f_{r_p}, p \in \mathbb{N})}$.

1. Montrer que (f_{r_p}) est totale si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(f_n, F_p) \to 0$ quand $p \to \infty$.
2. Montrer que (f_{r_p}) est totale si et seulement si $\sum_p \frac{1}{r_p} = +\infty$.

Exercice 8 : Fonctions de Haar

On note $E = L^2(]0,1[)$. On note $H_{-1} = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, et $0 \leq k \leq 2^n - 1$, on définit la fonction

$$H_{n,k}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n} \text{ si } x \in]\frac{k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}[\\ -\sqrt{2^n} \text{ si } x \in]\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^n}[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On notera $I_{n,k} =]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$, le support de $H_{n,k}$. On note $\mathcal{H} = \{H_{-1}\} \cup (H_{n,k})_{n\in\mathbb{N}, 0\leq k<2^n}$.

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est une famille orthonormée de E.
2. On va montrer dans cette question que $\mathcal{H}$ est une famille totale de E. On fixe donc $f \in E$ telle que pour tout $h \in \mathcal{H}$, $(h, f) = 0$ et on veut montrer que $f = 0$. On introduit la fonction $F(y) = \int_0^y f(t)dt$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^n$,

   $$F\left(\frac{k}{2^n}\right) + F\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = 2F\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)$$

   b) En déduire que $F = 0$ puis que $f = 0$.