

# Action de groupes sur les surfaces de Riemann et théorème d'Hurwitz

Thomas Giarrizzi

## **Abstract**

Étudier les surfaces de Riemann et les groupes agissant sur ces dernières, est tout de même quelque chose d'assez satisfaisant.

Premièrement parce que nous travaillons en petites dimensions, ce qui favorise grandement la visualisation et l'intuition derrière certains résultats.

Deuxièmement, la rigidité de la structure analytique complexe apporte son lot de propriétés assez riches (orientabilité, prolongement des fonctions holomorphes, théorème de l'application ouverte etc...), tout cela couplé à des hypothèses telles que la connexité et parfois la compacité, donne le sentiment d'être dans un monde quasi-parfait où il fait bon vivre.

Et enfin, troisièmement, parce que nous sommes à la frontière de plusieurs mondes merveilleux tels que la topologie, la géométrie (différentielle et algébrique), l'analyse complexe ainsi que l'algèbre évidemment.

Je remercie donc Andreas Höring de m'avoir fait découvrir ce (très) joli sujet, et de m'avoir également encadré durant ces 8 semaines pour la réalisation de ce mémoire.

Dans la première partie (Introduction), nous rappellerons quelques résultats essentiels sur les surfaces de Riemann, le tout de manière assez formelle. Le but n'est clairement pas d'énumérer une grande partie de cette théorie mais uniquement de revoir certains théorèmes qui nous seront utiles pour la suite.

La deuxième partie, qui concerne le coeur du sujet, sera consacrée aux actions de groupes sur les surfaces de Riemann. Au programme nous aurons :

- La construction de surfaces de Riemann quotient.
- Le théorème d'Hurwitz, qui fournit une borne (égale à  $84(g - 1)$ ) sur le cardinal du groupe d'automorphismes d'une surface compacte de genre  $g \geq 2$ .
- Un théorème d'uniformisation sur les surfaces.
- L'action des groupes fuchsien sur le demi-plan de Poincaré.

La troisième partie, plus calculatoire, viendra compléter la partie précédente en fournissant quelques exemples d'actions de groupes sur des surfaces de genre "petit" (0 à 3).

Le cas  $g = 3$  sera particulièrement intéressant et permettra de voir que la borne  $84(g - 1)$  est optimale, en prenant comme surface de Riemann la quartique de Klein qui a son groupe d'automorphismes de cardinal 168.

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Généralités sur les surfaces de Riemann . . . . .	4
1.2	Revêtements ramifiés . . . . .	11
1.3	Surface de Riemann compacte épointée . . . . .	12
1.4	Courbes algébriques et compactification . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Actions de groupe sur les surfaces de Riemann</b>	<b>17</b>
2.1	Cyclicité et finitude des sous-groupes stabilisateurs . . . . .	17
2.2	Structure de surface de Riemann quotient sur $X/G$ . . . . .	19
2.3	Théorème d'Hurwitz . . . . .	23
2.4	Finitude de $\text{Aut}(X)$ via les groupes fuchsien . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Exemples d'actions de groupes finis et compléments</b>	<b>30</b>
3.1	Actions sur la sphère de Riemann ( $g=0$ ) . . . . .	30
3.2	Actions sur un tore complexe ( $g=1$ ) . . . . .	33
3.3	Actions sur les surfaces compactes de genre 2 . . . . .	36
3.4	Actions sur la quartique de Klein ( $g=3$ ) . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Annexe</b>	<b>42</b>
4.1	Revêtements et surfaces de Riemann . . . . .	42
4.2	Homologie et groupe fondamental du tore à $g$ trous $T_g$ (Rappels)	43
4.3	Démonstration de la relation $\mu(\Lambda) =  \Gamma : \Lambda  \mu(\Gamma)$ . . . . .	46
	<b>References</b>	<b>48</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Généralités sur les surfaces de Riemann

**Definition 1.1.1** (Surfaces de Riemann). *Une surface de Riemann est une variété complexe connexe de dimension 1.*

**Remarque 1.1.2.** *Une surface de Riemann est donc simplement une variété réelle lisse connexe de dimension (réelle) égale à 2 avec des changements de cartes holomorphes. Elle est en particulier orientable.*

**Definition 1.1.3** (Applications holomorphes). *Une application  $F : X \rightarrow Y$  entre surfaces de Riemann est **holomorphe** s'il existe deux changements de cartes  $\varphi : V \subset Y \rightarrow W \subset \mathbb{C}$  et  $\psi : U \subset X \rightarrow O \subset \mathbb{C}$  tels que l'application*

$$\varphi \circ F \circ \psi^{-1} : O \subset \mathbb{C} \rightarrow W \subset \mathbb{C}$$

*soit holomorphe (au sens usuel de l'analyse complexe).*

**Proposition 1.1.4.** *Soient  $F, G : X \rightarrow Y$  deux applications holomorphes entre surfaces de Riemann. Si  $F = G$  sur un sous-ensemble  $S \subset X$  possédant un point d'accumulation, alors  $F = G$ .*

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{A}_{cc} \subset \{F = G\}$  l'ensemble des points d'accumulation. On vérifie aisément via la caractérisation séquentielle que  $\mathcal{A}_{cc}$  est fermé. De plus, pour tout  $x \in \mathcal{A}_{cc}$ , il existe une suite de points distincts  $(x_n)$  de  $\{F = G\}$  convergente vers  $x$ . En prenant deux cartes connexes  $\varphi : U \subset X \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{C}$  et  $\Psi : V \subset Y \rightarrow \Psi(V) \subset \mathbb{C}$  en  $x$  et  $\varphi(x)$  (respectivement), les applications holomorphes  $\Psi \circ F \circ \varphi^{-1}$  et  $\Psi \circ G \circ \varphi^{-1}$  coïncident sur  $\{\varphi(x_n), n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varphi(x)\}$  ayant  $\varphi(x)$  comme point d'accumulation, elles coïncident donc sur tout  $\varphi(U)$ . Ainsi  $U \subset \mathcal{A}_{cc}$  donc  $\mathcal{A}_{cc}$  est également ouvert. Par connexité de  $X$  et comme par hypothèse  $\mathcal{A}_{cc}$  est non-vide,  $\mathcal{A}_{cc} = X$ . □

**Proposition 1.1.5** (Forme locale normale). *Soient  $F : X \rightarrow Y$  une application holomorphe non-constante entre surfaces de Riemann et  $p \in X$ . Alors il existe un entier  $m \geq 1$  tel que pour toute carte  $\phi_2 : U_2 \subset Y \rightarrow V_2 \subset \mathbb{C}$  telle que  $\phi_2(F(p)) = 0$ , il existe une carte  $\phi_1 : U_1 \subset X \rightarrow V_1 \subset \mathbb{C}$  tel que  $\phi_1(p) = 0$  et  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z) = z^m$ , pour tout  $z \in V_1$ .*

*Démonstration.* Fixons une carte  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  tel  $\phi_2(F(p)) = 0$  et choisissons une carte quelconque  $\psi : U \rightarrow V$  tel que  $\psi(p) = 0$ . L'application  $T = \phi_2 \circ F \circ \psi^{-1}$  est de la forme  $T(w) = \sum_{n \geq 1} a_n w^n$ . Soit  $m = \min\{n \in \mathbb{N}^*, a_n \neq 0\}$ . Nous avons  $T(w) = w^m g(w)$  avec  $g$  holomorphe au voisinage de 0 et  $g(0) \neq 0$ . Il existe alors une fonction  $L$  holomorphe au voisinage de 0 tel que  $g(z) = e^{L(z)}$ . En posant  $h(z) = e^{L(z)/m}$  et  $f(w) = wh(w)$ , on a  $T(w) = f(w)^m$ . Comme  $f'(0) \neq 0$ ,  $f$  est un biholomorphisme local en 0 donc l'application  $\phi_1 = f \circ \psi : U_1 \subset X \rightarrow V_1 \subset \mathbb{C}$  est une carte de  $X$  tel que  $\phi_1(p) = 0$  avec  $U_1$  un voisinage de 0 assez petit pour que

$$f : \psi(U_1) \rightarrow f(\psi(U_1))$$

soit biholomorphe. Ainsi, pour tout  $z = f(w) = wh(w) \in V_1$ , on a

$$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z) = \phi_2 \circ F \circ \psi^{-1} \circ f^{-1}(z) = T \circ f^{-1}(z) = T(w) = (wh(w))^m = z^m.$$

On peut alors remarquer qu'au voisinage de  $F(p)$ , chaque point admet  $m$  antécédents de  $F$  au voisinage de  $p$  (comptés avec multiplicité, distincts si le point choisi est différent de  $F(p)$ ). L'entier  $m$  est alors unique et est indépendant des cartes.  $\square$

**Definition 1.1.6.** *L'entier  $m$  précédemment introduit est appelé la **multiplicité** de  $F$  au point  $p$  que l'on notera  $\text{mult}_p(F)$ . On dira de plus que  $p \in X$  est un point de **ramification** de  $F$  si  $\text{mult}_p(F) \geq 2$ , et que  $y \in Y$  est un point de **branchement** de  $F$  si  $y$  est image par  $F$  d'un point de ramification.*

**Remarque 1.1.7.** *On rappelle qu'une application  $p : E \rightarrow B$  entre espaces topologiques est appelé un revêtement si  $p$  est surjective (première condition) et si pour chaque point  $b \in B$  il est possible d'extraire un voisinage  $V_b$  de  $b$  tel qu'il existe une famille d'ouverts  $(O_i)_{i \in I}$  de  $E$  homéomorphes à  $V_b$  via  $p$  telle que  $p^{-1}(V_b) = \bigsqcup_{i \in I} O_i$  (deuxième condition). La notion de point de ramification est généralement utilisée pour décrire une application qui serait "presque" un revêtement, c'est à dire que l'application en question serait toujours surjective mais qu'en revanche la deuxième condition soit vérifiée sur tout l'ensemble d'arrivée sauf en un certain nombre de points (les points de branchements). Nous verrons par la suite qu'une application holomorphe entre surfaces de Riemann compactes est un **revêtement ramifié** (notion que l'on définira plus loin).*

**Définition-Proposition 1.1.8.** Soit  $F : X \rightarrow Y$  une application holomorphe non-constante entre surfaces de Riemann compactes. Pour chaque point  $y \in Y$ , on définit l'entier  $d_y(F) = \sum_{x \in F^{-1}(\{y\})} \text{mult}_x(F)$  qui ne dépend aucunement de  $y$  et on appellera cet entier le **degré** de  $F$  qu'on notera  $\text{deg}(F)$ .

*Démonstration.* On va montrer que l'application  $y \in Y \mapsto d_y(F) \in \mathbb{N}$  est continue, ce qui permettra de conclure par connexité de  $Y$ . Soit  $y \in Y$  fixé. Tout d'abord, comme  $F$  est non-constante et que  $X$  est compacte, alors toutes les fibres de  $F$  sont de cardinal fini (et non-nul car  $F$  est surjective), ce qui montre que l'entier  $d_y(F)$  est bien défini. Notons  $F^{-1}(\{y\}) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Soit  $\psi : U \subset Y \rightarrow V \subset \mathbb{C}$  une carte en  $y$  telle que  $\psi(y) = 0$ . Par la proposition 1.1.5 (Forme normale locale), il existe des cartes  $\varphi_i : O_i \subset X \rightarrow V_i \subset \mathbb{C}$  en  $x_i$  et des entiers  $m_1, \dots, m_n$  telles que  $\varphi_i(x_i) = 0$  et  $\psi \circ F \circ \varphi_i^{-1}(z) = z^{m_i}$  avec  $(O_i)_{1 \leq i \leq n}$  deux à deux disjoints.

La situation idéale serait de trouver un voisinage  $V_y \subset Y$  de  $y$  tel que pour tout  $v \in V_y$ ,  $F^{-1}(\{v\}) \subset \bigsqcup_{1 \leq i \leq n} O_i$  car quitte à restreindre  $V_y$  on peut supposer que chaque élément de celui-ci admet exactement  $m_i$  antécédents de  $F$  dans  $O_i$  (comptés avec multiplicité). On aura alors pour tout  $v \in V_y$ ,  $d_v(F) = \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n \text{mult}_{x_i}(F) = d_y(F)$ .

Supposons alors par l'absurde qu'il existe une suite  $(y_k)_k \in Y^{\mathbb{N}}$  convergente vers  $y$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_k \in (X \setminus (\bigcup_{i=1}^n O_i)) \cap F^{-1}(\{y_k\})$ . Par compacité de  $X$ , on extrait une sous-suite  $(x_{\varphi(k)})_k$  convergente vers un certain  $x \in X$ . Par continuité de  $F$  nous avons immédiatement  $F(x) = y$  donc il existerait  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $x = x_i$  et donc pour  $k$  assez grand,  $x_k$  appartiendrait à  $O_i$  (contradiction). L'existence de  $V_y$  est donc assurée.  $\square$

**Definition 1.1.9** (Triangulation). Une **triangulation** d'une surface  $X$  est la donnée d'un triplet d'ensemble  $(S, A, F)$  tel que :

- $S \subset X$  est un ensemble discret de points appelés "sommets".
- $A$  est un ensemble d'arcs de  $X$  (appelés "arêtes") dont les extrémités sont dans  $S$ .
- $F$  est un ensemble d'ouverts appelés "faces" connectés à exactement 3 arêtes (plus précisément dont la frontière est la réunion de 3 arêtes) et tel que  $X \setminus (\bigcup_{a \in A} a) = \bigcup_{f \in F} f$ .

En résumé, trianguler une surface revient à faire de cette dernière un puzzle dont les pièces sont homéomorphes à des triangles. On dira alors qu'une telle surface est **triangulable**.

**Théorème 1.1.10.** *Toute surface compacte est triangulable.*

La démonstration de ce théorème, un peu longue, pourra être consultée dans [Thom].

**Remarque 1.1.11.** *Par définition d'une surface triangulable, on en déduit immédiatement que toute surface compacte peut être munie d'une structure de CW-complexe fini.*

**Definition 1.1.12** (Caractéristique d'Euler). *La caractéristique d'Euler d'une surface compacte  $X$  est l'entier  $\chi(X) = |S| - |A| + |F|$ , où  $(S, A, F)$  est une triangulation de  $X$ . Cet entier ne dépend aucunement de la triangulation faite sur  $X$  ce qui montre que  $\chi$  est bien définie. Plus généralement, pour  $X$  un CW-complexe fini, on définit la caractéristique d'euler par  $\chi(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \text{rang}(H_n^{CW}(X; \mathbb{Z}))$ , où  $H_n^{CW}(X; \mathbb{Z})$  représente le  $n$ -ième groupe d'homologie cellulaire de  $X$ .*

**Definition 1.1.13** (genre d'une surface). *Le genre  $g$  d'une surface compacte orientable  $X$  est le nombre maximal de courbes simples fermées disjointes  $C_1, \dots, C_n$  tel que  $X \setminus (\bigcup_{i=1}^n C_i)$  soit toujours connexe. Ce nombre peut être calculé à l'aide du premier groupe d'homologie :  $g = \frac{1}{2} \text{rang}(H_1^{CW}(X; \mathbb{Z}))$ .*

**Théorème 1.1.14.** *Toute surface de Riemann compacte  $X$  est difféomorphe à une sphère ou à un tore à  $g$  "trous" (somme connexe de  $g$  tores).*

La démonstration de ce résultat est assez longue et s'éloigne du sujet ici considéré, elle se base notamment sur la théorie de Morse. On pourra consulter si besoin [Rydh] pour une preuve complète.

**Remarque 1.1.15.** . *Pour rappel,  $H_0^{CW}(X; \mathbb{Z}) = H_2^{CW}(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ ,  $H_1^{CW}(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}$  et  $H_n^{CW}(X; \mathbb{Z}) = 0$  pour  $n \geq 3$  (voir la section 4.2). Ainsi, le genre  $g$  d'une surface de Riemann désigne bien le nombre de "trous".*

**Corollaire 1.1.16.** *Soit  $X$  une surface de Riemann compacte de genre  $g$ . Alors  $\chi(X) = 2 - 2g$*

*Démonstration.* On utilise la remarque 1.1.15 afin d'obtenir

$$\chi(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \text{rang}(H_n^{CW}(X; \mathbb{Z})) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$$

□

**Remarque 1.1.17.** *Deux surfaces de Riemann compactes ayant le même genre sont difféomorphes mais en revanche elles ne sont pas forcément analytiquement isomorphes (biholomorphes), comme nous allons le voir avec les surfaces de genre 1. Cependant, dans le cas  $g = 0$ , nous avons le résultat suivant :*

**Théorème 1.1.18** (Premier théorème d’uniformisation). *Toute surface de Riemann simplement connexe est isomorphe à  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}_\infty$  ou au disque unité ouvert.*

**Remarque 1.1.19.** *La longueur et la difficulté de la preuve de ce théorème sont inversement proportionnelles à la taille de l’énoncé. Ce problème a mis à mal plusieurs grands mathématiciens de ”l’ancien temps” et n’a été résolu que cent ans après avoir été énoncé. On pourra lire [Unif] qui retrace l’histoire de ce résultat.*

**Théorème 1.1.20** (Formule d’Hurwitz). *Soient  $X, Y$  deux surfaces de Riemann compactes et  $F : X \rightarrow Y$  une application holomorphe non-constante. Alors*

$$2g(X) - 2 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{x \in X} (\text{mult}_x(F) - 1)$$

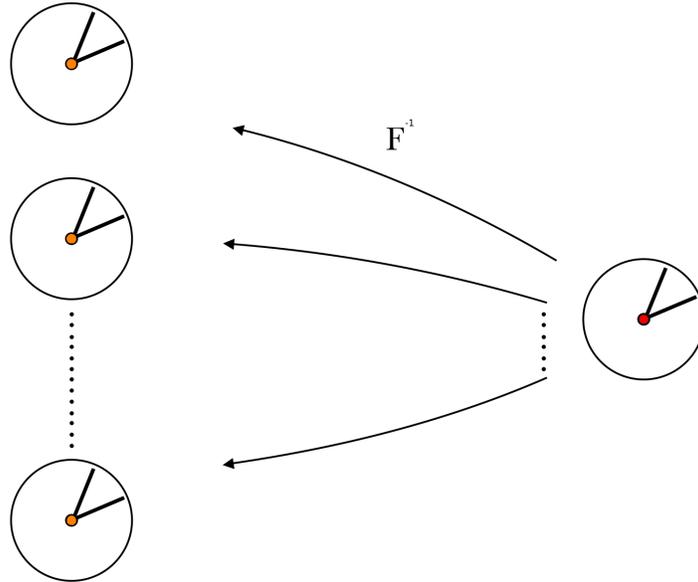
où  $g(\cdot)$  désigne le genre d’une surface de Riemann compacte.

*Démonstration.* Soit  $T_Y = (S_Y, A_Y, F_Y)$  une triangulation de  $Y$ . Quitte à la transformer en une triangulation plus ”fine”, on peut supposer que tous les points de branchements de  $F$  soient contenus dans  $S_Y$ . Par compacité de  $Y$ , on peut également supposer qu’il existe une famille finie d’ouverts  $(V_i)_{1 \leq i \leq m}$  de  $Y$  telle que chaque triangle soit contenu dans un ouvert  $V_i \subset Y$  vérifiant l’une des deux propriétés :

- 1)  $V_i$  est trivialisant :  $F^{-1}(V_i) = \bigsqcup_{j \in J_V} O_j$  avec  $O_j \cong V_i$  via  $F$ .
- 2) Il existe une coordonnée locale  $z$  centrée en  $p \in F^{-1}(V_i)$  telle que  $F(z) = z^m$  au voisinage de  $p$ , à l’aide de la proposition 1.1.5) (forme locale normale).

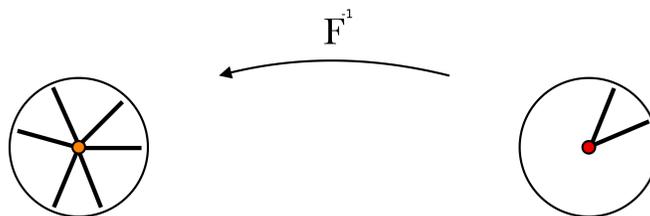
De cette manière, on obtient alors en tirant en arrière via  $F$  une triangulation  $T_X = (S_X, A_X, F_X)$  sur  $X$  telle que tous les points de ramifications sont contenus dans  $S_X$  et telle que l’image réciproque d’un triangle de  $Y$  par  $F$  est un triangle de  $X$ .

Dans le cas où les sommets du triangle ne sont pas des points de branchements, nous sommes dans la situation décrite dans le schéma ci-dessous (propriété numéro 1) :



Exemple dans le cas  $\text{mult}_x(F) = 1$ , pour tout  $x \in F^{-1}(\{y\})$ .

Dans le cas où un des sommets du triangle est un point de branchement, nous sommes en revanche dans la situation décrite dans le schéma ci-dessous (propriété numéro 2) :



Exemple dans le cas  $\text{mult}_x(F) = 3$ .

Par construction de  $T_X$ , on a  $|A_X| = \deg(F)|A_Y|$  et  $|F_X| = \deg(F)|F_Y|$ . En revanche, l'égalité n'est pas vérifiée pour les sommets (elle le serait si l'application n'était pas ramifiée autrement dit si  $F$  était un revêtement). Comme nous pouvons le voir dans le deuxième schéma, nous devons donc ajouter un terme d'erreur  $-(\text{mult}_x(F) - 1)$  à chaque point de ramification

$x \in X$ , nous pouvons même ajouter ce terme dans le cas où  $x$  n'est pas un point de ramification car de toute façon le terme d'erreur sera nul. Ainsi, nous obtenons :

$$2g(X) - 2 = -|S_X| + |A_X| - |F_X| = -(\deg(F)|S_Y| - \sum_{x \in X} \text{mult}_x(F) - 1) \\ + \deg(F)|A_Y| - \deg(F)|F_Y| = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{x \in X} (\text{mult}_x(F) - 1).$$

□

**Corollaire 1.1.21.** *Soit  $F : X \rightarrow Y$  une application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann compactes. Notons  $g(\cdot)$  le genre d'une surface.*

- 1) *Si  $Y \cong \mathbb{P}^1$  et  $\deg(F) \geq 2$ , alors  $F$  est ramifiée.*
- 2) *Si  $g(X) = g(Y) = 1$ , alors  $F$  n'est pas ramifiée.*
- 3)  *$g(X) \geq g(Y)$ .*
- 4) *Si  $g(X) = g(Y) \geq 2$ , alors  $F$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* On va utiliser la formule d'Hurwitz pour traiter chaque cas.

- 1) Puisque  $Y \cong \mathbb{P}^1$ , alors  $g(Y) = 0$ . Si  $F$  n'était pas ramifiée alors pour tout  $x \in X$ ,  $\text{mult}_x(F) - 1 = 0$  donc on aurait  $2g(X) - 2 = -2\deg(F) \leq -4$  et donc  $g(X) \leq -1$  (absurde).
- 2) Si  $g(X) = g(Y) = 1$ , alors  $\sum_{x \in X} \text{mult}_x(F) - 1 = 0$ , ce qui implique que pour tout  $x \in X$ ,  $\text{mult}_x(F) = 1$ .  $F$  n'est donc pas ramifiée.
- 3) Par la formule d'Hurwitz on a immédiatement :  
 $2g(X) - 2 \geq \deg(F)(2g(Y) - 2) \geq 2g(Y) - 2$  donc  $g(X) \geq g(Y)$ .
- 4) Rappelons déjà pourquoi  $F$  est surjective indépendamment de l'hypothèse sur les genres : puisque  $F$  est non constante alors elle est ouverte, par compacité de  $X$  et de  $Y$ ,  $F(X)$  est compact donc fermé dans  $Y$ . Par connexité de  $Y$ ,  $F(X) = Y$ .

Maintenant par hypothèse sur le degré de  $X$  et de  $Y$  nous avons

$$2(g(X) - 1)(1 - \deg(F)) = \sum_{x \in X} \text{mult}_x(F) - 1.$$

Le terme de gauche est négatif alors que le terme de droite est positif donc nécessairement  $F$  n'est pas ramifiée et  $\deg(F) = 1$ . Par définition du degré,  $F$  est donc injective, on conclut alors que  $F$  est un biholomorphisme.

□

**Remarque 1.1.22.** *En particulier donc si  $F$  est ramifiée et si  $g(X) = 1$ , alors  $Y$  est simplement connexe et donc isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ .*

## 1.2 Revêtements ramifiés

**Definition 1.2.1.** *Soit  $F : X \rightarrow Y$  une application continue entre deux variétés topologiques orientées de dimension 2. On dit que  $F$  est un **revêtement ramifié** si pour tout  $y \in Y$ , il existe:*

- *Un voisinage  $U$  de  $y$  et un homéomorphisme  $\Psi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ .*
- *Une application  $k : F^{-1}(\{y\}) \rightarrow \mathbb{N}^*$ .*
- *Un difféomorphisme  $\varphi : F^{-1}(U) \rightarrow V \times F^{-1}(\{y\})$  tel que pour tout  $x \in F^{-1}(\{y\})$ ,*

$$\Psi \circ F \circ \varphi^{-1}(z) = z^{k(x)}, \text{ pour tout } z \in V.$$

Comme annoncé plus tôt, on peut voir  $F$  comme une application qui serait "presque" un revêtement. Les points posant problèmes sont les points de branchements, c'est à dire les points  $y \in Y$  tels qu'il existe  $x \in F^{-1}(\{y\})$ , avec  $k(x) \geq 2$ . On peut voir que  $F$  est naturellement surjective et que les points de branchements sont discrets dans  $Y$ . Montrons désormais la proposition suivante qui est plus en lien avec le sujet.

**Proposition 1.2.2.** *Toute application  $F : X \rightarrow Y$  holomorphe, non-constante, et propre entre deux surfaces de Riemann est un revêtement ramifié. En particulier donc pour  $X, Y$  compactes, toute application holomorphe non-constante allant de  $X$  vers  $Y$  est un revêtement ramifié.*

*Démonstration.* Le fait que  $F$  soit propre et non constante permet dans un premier temps de montrer que les fibres de  $F$  sont non-vides et de cardinal fini. Cela permet également de traiter la preuve de manière complètement analogue que celle figurant dans la proposition 1.1.8 en utilisant les mêmes arguments de compacité par propriété de  $F$ . □

**Remarque 1.2.3.** *On peut montrer de plus que si  $X$  est compacte ( $Y$  aussi donc) et que  $F$  est non ramifiée (n'admet aucun point de branchement), alors  $F$  est un revêtement (un vrai). L'argument vient du fait que par définition du degré de  $F$ , toutes les fibres ont exactement le même cardinal. En particulier donc si  $\deg(F) = 1$ ,  $F$  est alors un isomorphisme.*

### 1.3 Surface de Riemann compacte épointée

**Definition 1.3.1.** *Une surface de Riemann **compacte épointée** est une surface de Riemann  $X$  telle qu'il existe un ouvert  $O \subset X$  tel que :*

- 1) *Il existe un biholomorphisme entre  $O$  et la réunion disjointe d'un nombre fini de disques épointés  $\{0 < z < 1\}$ .*
- 2)  *$X \setminus O$  est compact.*

*Nous pouvons associer à toute surface de Riemann épointée  $X$  une surface de Riemann  $\widehat{X}$  construite de la manière suivante :*

*En notant  $(D_i^* = D_i \setminus \{z_i\})_{i \in I}$  la famille finie de disques épointés telle que  $O \cong \bigsqcup_{i \in I} D_i^*$  via un biholomorphisme  $f$ , nous prenons alors  $\widehat{X} = X \cup_f Y = (X \sqcup Y) / \sim$  avec  $Y = \bigsqcup_{i \in I} D_i$  et  $\sim$  la relation engendrée par  $a \sim f(a)$ . Nous pouvons voir par construction que  $\widehat{X}$  est compacte et que  $\widehat{X} \setminus X$  est fini.*

**Exemple 1.3.2.** *La sphère de Riemann  $\mathbb{C}_\infty \setminus S$  privée d'un ensemble fini  $S$  est une surface de Riemann compacte épointée. Notons qu'une surface de Riemann compacte épointée privée d'un nombre fini de points est encore une surface de Riemann compacte épointée.*

**Lemme 1.3.3.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un revêtement fini (non ramifié) d'une surface de Riemann compacte épointée  $Y$ . Alors  $X$  est naturellement munie d'une structure de surface de Riemann compacte épointée qui rend  $f$  holomorphe. De plus  $f$  s'étend de manière unique en  $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$  holomorphe.*

*Démonstration.* Notons  $d$  le degré du revêtement.

Prenons  $O = \bigsqcup_{y \in \widehat{Y} \setminus Y} (D_y \setminus \{y\}) \subset Y$  un ouvert biholomorphe à une réunion finie disjointe de disques épointés tel que  $Y \setminus O$  est compact.

Pour tout  $y \in \widehat{Y} \setminus Y$ ,  $f|_{f^{-1}(D_y \setminus \{y\})}$  est un revêtement fini de  $D_y \setminus \{y\}$ .

Notons  $(C_i)_{i \in I_y}$  les composantes connexes de  $f^{-1}(D_y \setminus \{y\})$ . Comme  $f|_{C_i} : C_i \rightarrow D_y \setminus \{y\}$  est un revêtement connexe fini de degré  $d$ , alors il

correspond à un sous-groupe d'indice  $d$  de  $\pi_1(D_y \setminus \{y\}) = \mathbb{Z}$  (notons que  $D_y \setminus \{y\}$  est homotopiquement équivalent à  $\mathbb{S}^1$ ). Ce revêtement est donc équivalent au revêtement

$$z \in \{0 < z < 1\} \mapsto z^d \in \{0 < z < 1\}$$

et donc  $C_i$  est biholomorphe à  $D_y \setminus \{y\}$  (voir la fin de la section 4.1 en annexe). L'ouvert  $V = f^{-1}(O)$  est donc biholomorphe à une réunion finie disjointe de disques époinés. De plus, puisque  $f$  est un revêtement fini, alors c'est en particulier une application propre ce qui assure la compacité de  $X \setminus V$  et donc la structure de surface de Riemann compacte époinée de  $X$ .

Notons maintenant  $x_i \in \widehat{X} \setminus X$  le point ajouté à  $C_i$  tel que  $\widehat{C}_i = C_i \cup \{x_i\}$  soit isomorphe à  $D_y$ . En posant  $\widehat{f}(x_i) = y$ , nous prolongeons  $f$  de manière unique en une application  $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$  holomorphe, ce qui conclut la preuve du lemme. □

**Remarque 1.3.4.** *Ce lemme va nous être particulièrement utile pour compactifier certaines courbes algébriques et ainsi pourvoir calculer leur genre à l'aide de la formule de Riemann-Hurwitz.*

**Exemple 1.3.5.** .

- 1) Soient  $S \subset \mathbb{C}_\infty$  un ensemble fini et  $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty \setminus S$  un revêtement fini non ramifié. Alors  $X$  est une surface de Riemann compacte époinée.
- 2) (motivation pour la suite) Soit  $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, y^2 = x(x-1)\}$ . Définissons  $\pi : (x, y) \in C \mapsto x \in \mathbb{C}$ . L'application  $\pi$  est un revêtement fini (de degré 2) et induit donc une application

$$\widehat{\pi} : \widehat{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$$

holomorphe. Les points 0 et 1 sont les seuls points de branchements de  $\widehat{\pi}$  (nous verrons juste après pourquoi  $\infty$  n'en est pas un). Comme  $g(\mathbb{C}_\infty) = 0$ , alors par la formule d'Hurwitz nous avons  $g(\widehat{C}) = 0$ .

## 1.4 Courbes algébriques et compactification

Soit  $P \in \mathbb{C}[X, Y]$  un polynôme irréductible de degré  $\geq 1$ . Définissons

$$C_P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2, P(x, y) = 0 \text{ et } \left( \frac{\partial P}{\partial x}(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) \neq (0, 0) \right\}.$$

Par le théorème des fonctions implicites,  $C_P$  est une sous-variété complexe de dimension 1 dans  $\mathbb{C}^2$ . De plus, un théorème (non élémentaire et non trivial) affirme que  $C_P$  est connexe, grâce à l'irréductibilité de  $P$ . Pour avoir une démonstration de ce résultat, on pourra consulter [Fisc].

**Exemple 1.4.1.** .

1) Si  $P(x, y) = y^2 - x(x - 1)$ , alors

$$C_p = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, y^2 = x(x - 1)\}.$$

2) Si  $P(x, y) = y^2 - x^2(x - 1)$  alors

$$C_p = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0, 0\}, y^2 = x^2(x - 1)\}.$$

3) Le lieu des zéros de  $y^2 - x^2(x - 1)$  n'est pas une surface de Riemann, nous avons un point double en  $(0, 0)$  qu'il faut retirer si l'on veut obtenir une surface de Riemann comme sur l'exemple précédent. En revanche, le lieu des zéros peut être paramétré par l'application

$$t \in \mathbb{C} \mapsto (t^2(t - 1), t^2) \in \{y^2 = x^2(x - 1)\}.$$

Supposons que  $P \notin \mathbb{C}[x]$ , c'est à dire que  $C_P$  n'est pas une droite parallèle à l'axe des  $y$ . Notons  $n$  le degré de  $y$  dans  $P(x, y)$  et l'ensemble fini

$$S_0 = \{x \in \mathbb{C}, P(x, \cdot) \text{ est de degré } < n \text{ ou a une racine multiple}\}.$$

En posant alors

$$X_P = \{(x, y) \in C_P, x \notin S\}, \quad S = S_0 \cup \{\infty\},$$

L'application  $\pi_P : (x, y) \in X_P \mapsto x \in \mathbb{C}_\infty \setminus S$  est un revêtement non ramifié de degré  $n$ . D'après le lemme 1.3.3,  $X_P$  est une surface de Riemann compacte épointée, et donc de même pour  $C_P$ . On introduit alors la définition suivante:

**Definition 1.4.2.** La surface de Riemann compacte  $\widehat{X}_P = \widehat{C}_P$  est canoniquement associée à la courbe algébrique définie par  $P$ .

Nous appellerons  $\widehat{C}_P$  la **compactification** de  $C_P$ .

### 1.4.3 Courbes hyperelliptiques

Soit  $h$  un polynôme de degré  $2g + 1 + \epsilon$  (avec  $g \geq 0$  et  $\epsilon = 0$  ou  $1$ ) et supposons que  $h$  est à racines simples. Le polynôme  $P(x, y) = y^2 - h(x)$  est donc irréductible, ce qui donne

$$C_P = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, y^2 = h(x)\}$$

et

$$S_0 = \{x \in \mathbb{C}, h(x) = 0\}.$$

Chaque point  $x \in \{h = 0\} \subset \mathbb{C}_\infty$  admet un unique antécédant dans  $C_P$  (le point  $(x, 0)$ ) pour l'application  $\pi_P$ , c'est donc un point de branchement avec un indice de ramification égal à 2 (comme  $\pi_P$  est de degré 2).

Étudions maintenant le cas  $x = \infty$ . Dans *Algebraic Curves and Riemann Surfaces* de Rick Miranda [Mira], la surface  $\widehat{C_P}$  peut être obtenue d'une autre manière, qui permet de mieux comprendre le comportement à l'infini : Définissons

- $U = \{(x, y) \in C_P, x \neq 0\}$ .
- $Y \subset \mathbb{C}^2$  la courbe lisse définie par l'équation

$$w^2 = z^{2g+2}h(1/z)$$

(notons que  $z^{2g+2}h(1/z)$  est un polynôme).

- $V = \{(z, w) \in Y, z \neq 0\}$ .

En posant l'isomorphisme

$$\phi : (x, y) \in U \longmapsto (z, w) = (1/x, y/x^{g+1}) \in V,$$

Nous obtenons alors la même variété compacte en collant  $X$  et  $Y$  le long de  $U$  et  $V$  via  $\phi$  (la variété  $Z = (X \sqcup Y) /_{(x,y) \sim \phi(x,y)}$ ). À l'aide de ce point de vue, le point  $\infty$  est un point de branchement de  $\widehat{\pi_P}$  si 0 est un point de branchement de l'application

$$(z, w) \in \{w^2 = z^{2g+2}h(1/z)\} \mapsto z \in \mathbb{C}.$$

En notant  $(a_i)_{i \in I}$  les racines de  $h$ , cela revient en fait à étudier l'équation

$$w^2 = z^{1-\epsilon} \prod_{i \in I} (1 - a_i z).$$

Ainsi,  $\infty$  est un point de branchement de  $\widehat{\pi}_P \iff \epsilon = 0$  (autrement dit si le degré de  $h$  impair). L'application  $\widehat{\pi}_P$  admet donc quoi qu'il arrive  $2g + 2$  points de branchements avec 2 comme indice de ramification à chacun.

Par la formule d'Hurwitz, nous avons  $2g(\widehat{C}_P) - 2 = \deg(\widehat{\pi}_P)(2g(\mathbb{C}_\infty) - 2) + \sum_{a \in \widehat{C}_P} (\text{mult}_a(\widehat{\pi}_P) - 1) = 2 \cdot (0 - 2) + (2g + 2) = 2g - 2$ . Ainsi,  $g(\widehat{C}_P) = g$ .

**Remarque 1.4.3.** *La variété  $Z = (X \sqcup Y) /_{(x,y) \sim \phi(x,y)}$  est effectivement isomorphe à  $\widehat{C}_P$ , elle est en fait obtenue en ajoutant un point  $\infty_1$  (resp. deux points  $\infty_1, \infty_2$ ) à l'infini sur  $C_P$  si le degré est impair (resp. pair). D'après le lemme 1.3.3, l'injection canonique  $C_P \rightarrow Z \setminus \{\infty_i\}$  se prolonge en un isomorphisme  $\widehat{C}_P \rightarrow Z$ .*

Terminons cette section avec la définition de surfaces hyperelliptiques :

**Definition 1.4.4** (surfaces hyperelliptiques). *Une surface de Riemann compacte  $X$  est appelée **hyperelliptique** s'il existe une application holomorphe  $X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  de degré 2.*

On peut montrer que toute surface hyperelliptique est isomorphe à la compactification d'une courbe de la forme

$$y^2 = P(x)$$

avec  $P$  un polynôme à racines simples. Une preuve est notamment donnée dans [Tele].

## 2 Actions de groupe sur les surfaces de Riemann

**Definition 2.0.1.** Soit  $G$  un groupe agissant sur une surface de Riemann  $X$ . On dit que  $G$  agit:

- holomorphiquement si pour tout  $g \in G$ , l'application  $x \mapsto g.x$  est holomorphe de  $X$  dans lui-même.
- de manière effective (ou fidèlement) si pour tout  $g \in G$ ,  $(x \mapsto g.x) = id$  implique que  $g$  est trivial.
- proprement discontinuement si pour tout compact  $K \subset X$ ,  $\{g \in G, gK \cap K \neq \emptyset\}$  est fini.
- librement si pour tout  $(g, x) \in G \times X$ ,  $g.x = x$  si et seulement si  $g$  est trivial.

**Remarque 2.0.2.** Autre définition équivalente pour dire qu'une action est proprement discontinue : pour toute paire de compacts  $K, K' \subset X$ ,  $\{g \in G, gK \cap K' \neq \emptyset\}$  est fini.

### 2.1 Cyclicité et finitude des sous-groupes stabilisateurs

**Proposition 2.1.1.** Soit  $G$  un groupe agissant holomorphiquement et fidèlement sur une surface de Riemann  $X$ . Fixons  $p \in X$ . Si le sous-groupe stabilisateur  $G_p$  est fini alors il est nécessairement cyclique.

*Démonstration.* Choisissons une carte  $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$  avec  $p \in U$  telle que  $\varphi(p) = 0$ . Notons pour  $g \in G_p$  l'application :

$$\Gamma : G_p \rightarrow \text{Aut}(V)$$
$$\Gamma(g) : z \in V \mapsto \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}(z) = \sum_{n \geq 1}^{+\infty} a_n(g) z^n \in \mathbb{C}.$$

Notons que la série entière ci-dessus ne possède pas de terme constant puisque  $\varphi(p) = 0$ .

Puisque  $\Gamma(g)$  est holomorphe et injective sur  $V$ , alors nécessairement sa dérivée  $\Gamma'(g)$  ne s'annule jamais donc  $a_1(g) = \Gamma'(g)(0) \neq 0$ . L'application  $\Gamma$  induit donc une application  $a_1 : G_p \rightarrow \mathbb{C}^\times$ . Nous allons en fait montrer que

$a_1$  est un morphisme de groupes injectif, ce qui achèvera la preuve puisque l'on aura  $G_p \cong a_1(G_p) = \mathbb{U}_m$  pour un certain  $m \in \mathbb{Z}$ . Pour tous  $g, h \in G_p$ ,  $\Gamma(g) \circ \Gamma(h) = \Gamma(gh)$  avec

$$\Gamma(g) \circ \Gamma(h)(z) = \sum_{n \geq 1}^{+\infty} a_n(g) \left( \sum_{k \geq 1}^{+\infty} a_k(h) z^k \right)^n \equiv a_1(g) a_1(h) z \pmod{z^2}.$$

$a_1$  est donc bien un morphisme. Soit maintenant  $g \in \ker(a_1)$ . Nous voulons montrer que  $g$  est nécessairement trivial. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout  $z \in V$ , on a  $\Gamma(g)(z) = z$ , par conséquent  $g.x = x$ , pour tout  $x \in U$ , qui entrainera l'égalité sur  $X$  tout entier par connexité de  $X$  et donc comme l'action de  $G$  sur  $X$  est effective,  $g$  sera trivial.

Supposons par l'absurde qu'il existe  $z \in V$  tel que  $\Gamma(g)(z) \neq z$ . Soit  $m$  le plus petit entier  $\geq 2$  tel que  $a_m(g) \neq 0$ .

Nous avons alors  $\Gamma(g)(z) = z + a_m(g)z^m \pmod{z^{m+1}}$ . Or, puisque  $G_p$  est fini, nous avons  $g^k = e$ , pour un certain  $k \in \mathbb{N}^*$ , donc  $\Gamma(g^k) \equiv z + k a_m(g) z^m \equiv z \pmod{z^{m+1}}$  ce qui implique que  $a_m(g) = 0$  (contradiction).  $\square$

**Proposition 2.1.2.** *Soit  $G$  un groupe agissant holomorphiquement, proprement discontinuement et fidèlement sur une surface de Riemann  $X$ . Alors les points  $x$  de  $X$  dont le stabilisateur  $G_x$  est non trivial sont discrets dans  $X$ .*

*Démonstration.* Soit  $U \subset X$  un ouvert relativement compact. Notons l'ensemble (fini par hypothèse sur  $U$ )  $G_U = \{g \in G, gU \cap U \neq \emptyset\}$ . Pour  $g \in G_U \setminus \{e\}$ , notons également  $(x_g^i)_i = \{x \in U, g.x = x\}$  les points fixes de  $g$  dans  $U$ , qui est encore un ensemble fini (on notera  $n_g$  son cardinal). En effet, s'il existait une suite de points distincts  $(x_n)_n$  à valeur dans  $(x_g^i)_i$ , alors par hypothèse sur  $U$ , quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $(x_n)_n$  converge vers un point  $x \in \bar{U}$ . L'application holomorphe  $x \mapsto g.x$  coïncidant avec l'identité sur la partie  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$  ayant  $x$  comme point d'accumulation, on en conclut par connexité de  $X$ , que ces deux applications coïncident sur  $X$  tout entier.  $G$  agissant fidèlement sur  $X$ ,  $g$  est forcément trivial (absurde).

Par séparation de  $X$ , nous avons l'existence d'une famille  $\{U_g^i, g \in G_U \setminus \{e\}, 1 \leq i \leq n_g\}$  d'ouverts deux à deux disjoints contenant respectivement chaque  $x_g^i$ . Par construction,  $x_g^i$  est l'unique point de  $U_g^i$  qui admet un sous-groupe stabilisateur non-trivial.  $\square$

**Corollaire 2.1.3.** *Soit  $G$  un groupe agissant holomorphiquement et proprement discontinuement sur une surface de Riemann  $X$ . Alors tous les sous-groupes stabilisateurs sont finis et donc cycliques.*

*Démonstration.* Puisque l'action est proprement discontinue, en prenant  $K = \{x\}$  pour  $x \in X$  quelconque, on en déduit que  $G_x$  est fini et par la proposition 2.1.1, ce sous-groupe est cyclique.  $\square$

## 2.2 Structure de surface de Riemann quotient sur $X/G$

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $G$  un groupe agissant holomorphiquement, proprement discontinuement et fidèlement sur une surface de Riemann  $X$ . Fixons  $p \in X$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $p$  tel que :*

- (a)  $U$  est invariant sous l'action de  $G_p$ .
- (b)  $U \cap (g.U) = \emptyset, \forall g \notin G_p$ .
- (c) L'application canonique  $\pi : X \rightarrow X/G$  induit un homéomorphisme  $\overline{\pi|_U} : U/G_p \rightarrow O \subset X/G$  pour un certain ouvert  $O$  de  $X/G$ .
- (d) Aucun point de  $U \setminus \{p\}$  n'est fixé par un élément non trivial de  $G_p$ .

*Démonstration.* Donnons nous directement grâce à la proposition 2.1.2 un voisinage ouvert relativement compact  $W$  de  $p$  tel que pour tout  $x \in W \setminus \{p\}$ , on ait  $G_x = \{e\}$ . Notons désormais  $(G \setminus G_p) \cap G_W = \{g_1, \dots, g_k\}$  avec  $G_W = \{g \in G, gW \cap W \neq \emptyset\}$ . Par séparation de  $X$ , comme pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , on a  $p \neq g_i.p$ , alors il existe un couple  $(U_i, V_i)$  d'ouverts contenant respectivement  $p$  et  $g_i.p$  tel que  $U_i \cap V_i = \emptyset$ . Notons que  $p \in g_i^{-1}V_i$ .

Posons  $V = \bigcap_{i=1}^k (g_i^{-1}V_i \cap U_i)$ , qui contient  $p$ . Nous avons  $g_i V \cap V = \emptyset$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . En posant maintenant  $U = \bigcap_{g \in G_p} (g(V \cap W))$ , nous avons  $gU = U$ , pour tout  $g \in G_p$  donc  $U$  est bien invariant sous l'action de  $G_p$ , de plus les propriétés (b) et (d) vérifiées. Pour obtenir (c), notons que  $\pi|_U : U \rightarrow X/G$  est ouverte et continue. Cette application se factorise donc en un homéomorphisme  $\overline{\pi|_U} : U/G_p \rightarrow \pi(U) \subset X/G$  telle que  $\pi|_U = \overline{\pi|_U} \circ q$  avec  $q : U \rightarrow U/G_p$  l'application passage au quotient.  $\square$

**Théorème 2.2.2.** *Soit  $G$  un groupe agissant holomorphiquement, proprement discontinuement et fidèlement sur une surface de Riemann  $X$ . Il existe alors une structure de surface de Riemann sur  $X/G$  induite par celle sur  $X$ .*

De plus, l'application canonique  $\pi : X \rightarrow X/G$  est holomorphe, de degré  $|G|$  si  $G$  est fini, et  $\forall p \in X, \text{mult}_p(\pi) = m = |G_p|$ .

*Démonstration.* (1) *Construction de cartes compatibles sur  $X/G$ .*

Soit  $p \in X$ . Donnons nous le voisinage  $U \subset X \in \mathcal{V}(p)$  et l'homéomorphisme  $\overline{\pi|_U} : U/G_p \rightarrow O = \pi(U) \subset X/G$  donnés par la proposition 2.2.1 vérifiant toutes les propriétés voulues. Quitte à restreindre  $U$ , on peut supposer qu'il est le domaine d'une carte  $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$  sur  $X$ . En reprenant notre famille d'applications holomorphes  $(\Gamma(g) = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1})_{g \in G_p}$  introduite dans la proposition 2.1.1, définissons

$$h : z \in V \mapsto \prod_{g \in G_p} \Gamma(g)(z) \in V \subset \mathbb{C}$$

$h$  est bien sûr holomorphe et  $p$  est un zéro de multiplicité  $|G_p|$  de l'application  $H = h \circ \varphi : U \rightarrow V$ . Quitte à restreindre encore une fois  $U$ , on peut supposer que chaque point  $w \in H(U)$  admet exactement  $m = |G_p|$  antécédents (distincts si  $w \neq 0$ ) par la fonction  $H$ .  $\forall w = H(x) \in H(U)$ , on a en fait  $H^{-1}(\{w\}) = G_p.x = \{g.x, g \in G_p\}$  car  $H$  est invariante sous l'action de  $G_p$  :

$$H(g'.z) = \prod_{g \in G_p} \varphi(gg'.z) = \prod_{g \in G_p} \varphi(g.z) = H(z).$$

Nous avons  $\forall x \in U \setminus \{p\}, |G_p.x| = m$  par construction de  $U$ . Maintenant,  $H$  se factorise en un homéomorphisme  $\overline{H} : U/G_p \rightarrow V$  tel que  $H = \overline{H} \circ q$  avec  $q : U \rightarrow U/G_p$  l'application passage au quotient.  $\overline{H}$  est en fait automatiquement holomorphe puisque  $H$  l'est. L'application  $\overline{H} \circ \overline{\pi|_U}^{-1} : \pi(U) \subset X/G \rightarrow V \subset \mathbb{C}$  désigne ainsi une carte sur  $X/G$ . Nous avons bien entendu  $X/G$  recouvert par les ouverts  $\pi(U)$  et la compatibilité des cartes sur  $X$  induisent par construction la compatibilité des cartes sur  $X/G$ .

(2) *Structure de surface de Riemann sur  $X/G$ .*

Montrons que  $X/G$  est **séparé** : Si  $G.a \neq G.b$  dans  $X/G$ , alors  $a \notin G.b$ . Prenons un voisinage ouvert relativement compact  $O^{(a)}$  de  $a$  biholomorphe à  $D(0, 1)$  via une carte  $\phi : O^{(a)} \rightarrow D(0, 1)$  centrée en  $a$  (i.e  $\phi(a) = 0$ ). Posons (pour  $n \in \mathbb{N}^*$ )  $O_n^{(a)} = \phi^{-1}(D(0, 1/n))$  et procédons de même pour  $b$ . Proposition : pour  $n$  grand,  $\pi(O_n^{(a)})$  et  $\pi(O_n^{(b)})$  sont

disjoints. Supposons que cela ne soit pas le cas. Il existerait trois suites:  $a_n, b_n$  et  $g_n$  telles que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$a_n \in O_n^{(a)}, b_n \in O_n^{(b)}, g_n \in G \text{ et } a_n = g_n \cdot b_n.$$

$g_n$  appartient en fait à  $\{g \in G, O_1^{(a)} \cap gO_1^{(b)} \neq \emptyset\}$  qui est fini puisque l'action est proprement discontinue. Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer  $g_n = g$  pour un certain  $g \in G$ . En passant à la limite, on aurait alors  $a = g \cdot b$  et donc  $a \in G \cdot b$  (absurde).

$X/G$  est **connexe** car  $X$  l'est et  $\pi : X \rightarrow X/G$  est continue surjective.  $X/G$  est à **base dénombrable** puisque  $X$  l'est: en notant  $(O_n)_n$  une base dénombrable d'ouverts de  $X$ ,  $(\pi(O_n))_n$  est clairement une base dénombrable d'ouverts de  $X/G$ .

(3) Propriétés de  $\pi : X \rightarrow X/G$ .

Puisque  $X/G$  est bien une surface de Riemann d'après le point précédent, montrons que  $\pi$  est bien holomorphe en tant qu'applications entre surface de Riemann: en prenant  $\overline{H} \circ \overline{\pi|_U}^{-1}$  une carte en  $\overline{p}$  sur  $X/G$  construite comme précédemment, et  $\varphi$  une carte en  $p$  comme dans le point (1), nous avons en fait  $(\overline{H} \circ \overline{\pi|_U}^{-1}) \circ \pi \circ \varphi^{-1}$  qui est localement égale à  $h$  qui est bien holomorphe. De plus, d'après les propriétés de  $h$ , nous avons également  $\text{mult}_p(\pi) = m = |G_p|$  et comme  $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigsqcup_{\overline{g} \in G/G_p} gU$ , alors si  $G$  est fini,  $\deg(\pi) = \sum_{\overline{g} \in G/G_p} \text{mult}_{g.p}(\pi) = |G/G_p| |G_p| = |G|$ .  $\square$

**Lemme 2.2.3.** *Soient  $G$  un groupe fini agissant holomorphiquement et fidèlement sur une surface de Riemann compact  $X$  et  $\pi : X \rightarrow Y = X/G$  l'application quotient. Alors pour tout point de branchement  $y \in Y$ , il existe un entier  $r \geq 2$  tel que  $|\pi^{-1}(\{y\})| = |G|/r$  et pour tout  $x \in \pi^{-1}(\{y\})$ , on a  $\text{mult}_x(\pi) = r$ .*

*Démonstration.* En se donnant  $p \in X$  et  $U \subset X$  le voisinage de  $p$  fourni par la proposition 2.2.1, nous avons  $\pi^{-1}(\{\overline{p}\}) = \{g.p, \overline{g} \in G/G_p\}$ , avec  $\text{mult}_{g.p}(\pi) = |G_p|$ . Nous prenons alors  $r = |G_p|$ .  $\square$

**Corollaire 2.2.4** (Formule des genres). *Soient  $G$  un groupe fini agissant holomorphiquement et fidèlement sur une surface de Riemann compacte  $X$  et  $\pi : X \rightarrow Y = X/G$  l'application quotient. Supposons qu'il y a  $k$  points de*

branchements  $y_1, \dots, y_k$  dans  $Y$ , de multiplicité respective  $r_i$  aux  $|G|/r_i$  points envoyés sur  $y_i$ . Alors

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 &= |G|(2g(X/G) - 2) + \sum_{i=1}^k \frac{|G|}{r_i}(r_i - 1) \\ &= |G| \left( 2g(X/G) - 2 + \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) \right). \end{aligned}$$

*Démonstration.* En appliquant la formule d'Hurwitz (Théorème 1.1.20) à l'application holomorphe  $\pi : X \rightarrow X/G$  et en notant  $S = \{x \in X, \text{mult}_x(\pi) \geq 2\}$  nous avons

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 &= \text{deg}(\pi)(2g(X/G) - 2) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(\pi) - 1) \\ &= |G|(2g(X/G) - 2) + \sum_{p \in S} (\text{mult}_p(\pi) - 1) \end{aligned}$$

$$\text{avec } \sum_{p \in S} (\text{mult}_p(\pi) - 1) = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \pi^{-1}(\{y_i\})} (\text{mult}_x(\pi) - 1) = \sum_{i=1}^k \frac{|G|}{r_i}(r_i - 1). \quad \square$$

**Lemme 2.2.5.** *Nous nous plaçons sous les mêmes hypothèses que le corollaire précédent. Notons  $R$  la quantité  $\sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{r_i})$ . Alors*

$$\begin{aligned} (a) \quad R < 2 &\iff \begin{cases} k = 1, r_1 \text{ quelconque}; \\ k = 2, r_1, r_2 \text{ quelconques}; \text{ ou} \\ k = 3, \{r_i\} = \{2, 2, r_3 \text{ quelconque}\}; \text{ ou} \\ k = 3, \{r_i\} = \{2, 3, 3\}, \{2, 3, 4\}, \text{ or } \{2, 3, 5\}. \end{cases} \\ (b) \quad R = 2 &\iff \begin{cases} k = 3, \{r_i\} = \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 4\}, \text{ or } \{3, 3, 3\}; \text{ or} \\ k = 4, \{r_i\} = \{2, 2, 2, 2\}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$(c) \quad \text{Si } R > 2 \text{ alors en fait } R \geq 2 + \frac{1}{42} \text{ avec égalité si et seulement si } k = 3, \{r_i\} = \{2, 3, 7\}.$$

*Démonstration.* Le sens réciproque de chacune des équivalences ci dessus est facilement vérifiable. Vérifions le sens direct. On supposera dans tout ce qui suit que  $r_1 \leq \dots \leq r_k$ .

(a) Supposons  $R < 2$ . Nécessairement  $k < 4$  car pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , on a  $-\frac{1}{r_i} \geq -\frac{1}{2}$  donc  $R = \sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{r_i}) \geq \frac{k}{2}$ . Si  $k \geq 4$  alors on aurait  $R \geq 2$  (absurde).

Il n'y a rien à faire pour  $k = 1, 2$ . Supposons donc que  $k = 3$ .

Si  $r_1 \geq 3$ ,  $-\frac{1}{r_i} \geq -\frac{1}{3}$  donc on aurait  $R = 3 - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \geq 2$  (absurde).

Ainsi  $r_1 = 2$ .

Si  $r_2 \geq 4$  alors pour  $i = 2, 3$ ,  $-\frac{1}{r_i} \geq -\frac{1}{4}$  donc  $R = 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \geq 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \geq 2$  (absurde). Ainsi,  $r_2 \in \{2, 3\}$ .

Si  $r_2 = 3$  et  $r_3 \geq 6$  alors  $R = 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{r_3} \geq 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 2$  (absurde). Ainsi, si  $r_2 = 3$  alors  $r_3 \in \{3, 4, 5\}$ .

(b) Supposons  $R = 2$ . Puisque  $r_i \geq 2$ , alors nécessairement  $k = 3, 4$ .

Si  $k = 4$  et un des  $(r_i)_i$  était supérieur à 3, alors on aurait  $R > 2$  donc en fait  $k = 4 \implies \{r_i\} = \{2, 2, 2, 2\}$ . Le cas  $k = 3$  se ramène à trouver les solutions  $a, b, c \in \mathbb{N}^*$  telles que  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$  et on vérifie que seules les solutions proposées sont les bonnes.

(c) Supposons  $R > 2$ . Puisque  $r_i \geq 2$ , alors  $k \geq 3$ .

Si  $k \geq 5$  alors  $R \geq k/2 \geq 5/2 > 2 + 1/42$ .

Si  $k = 4$  alors  $r_4 \geq 3$  donc  $R = 4 - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \geq 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} > 2 + 1/42$ .

Supposons maintenant que  $k = 3$ .

Si  $r_1 \geq 3$ , alors nécessairement  $r_3 \geq 4$ . et donc  $R - 2 = 1 - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \geq 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{r_3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{r_3}$  et  $\frac{1}{3} - \frac{1}{r_3} > \frac{1}{42} \iff r_3 > \frac{42}{13}$  (ce qui est le cas).

Si  $r_1 = 2$  et  $r_2 \geq 5$ , alors  $R - 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \geq \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10} > \frac{1}{42}$ .

Si  $r_1 = 2$  et  $r_2 = 4$  alors nécessairement  $r_3 \geq 5$  et donc  $R - 2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{r_3} \geq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \geq \frac{1}{20} > \frac{1}{42}$ . Si  $r_1 = 2, r_2 = 3$  alors comme  $R - 2 > 0$  alors nécessairement  $r_3 \geq 7$ . Dans le cas où  $r_3 = 7$  on a  $R = 2 + 1/42$ , sinon si  $k \geq 8$  alors  $R - 2 \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24} > \frac{1}{42}$ .

□

## 2.3 Théorème d'Hurwitz

**Théorème 2.3.1** (Théorème de Hurwitz). *Soit  $X$  une surface de Riemann compacte de genre  $g(X) \geq 2$ . Alors  $G = \text{Aut}(X)$  est un groupe fini d'ordre au plus  $84(g(X) - 1)$ .*

*Démonstration.* Nous admettons pour le moment que  $G$  est fini. Nous le démontrerons plus tard. Soit  $\pi : X \rightarrow X/G$  l'application quotient. Notons

encore  $R$  la quantité  $\sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{r_i})$ . Par la formule des genres nous avons

$$2(g(X) - 1) = |G|(2g(X/G) - 2 + R).$$

- Si  $g(X/G) \geq 1$  et  $R = 0$ , alors  $g(X) - 1 = |G|(g(X/G) - 1)$ . Ceci implique  $g(X/G) \geq 2$  (car  $g(X) \geq 2$ ) donc  $g(X) - 1 \geq |G|$ .
- Si  $g(X/G) \geq 1$  et  $R \neq 0$ , alors  $R = \sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{r_i}) \geq 1/2$  donc  $\frac{2(g(X)-1)}{|G|} = 2(g(X/G) - 1) + R \geq 2(g(X/G) - 1) + 1/2$  donc  $\frac{g(X)-1}{|G|} \geq g(X/G) - 1 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$  et ainsi  $|G| \leq 4(g(X) - 1)$ .
- Si  $g(X/G) = 0$  alors  $0 < 2(g(X) - 1) = |G|(R - 2)$ . Ceci implique  $R > 2$  donc d'après le lemme précédent  $R - 2 \geq \frac{1}{42}$  et ainsi  $|G| \leq 84(g(X) - 1)$ .

□

**Remarque 2.3.2.** 1) *Nous allons également montrer plus tard que la borne  $84(g(X) - 1)$  est optimale, au sens où elle peut être atteinte (dans le cas  $g(X) = 3$  par exemple). Dans les années 1960, A.M.Macbeath a montré que cette borne était atteinte une infinité de fois, et également qu'elle n'était pas atteinte une infinité de fois (voir [Macb]). De plus, un groupe fini  $G$  agissant holomorphiquement et fidèlement sur une surface de Riemann compact de genre  $g \geq 2$  est appelé un **groupe d'Hurwitz** s'il atteint la borne d'Hurwitz. On peut montrer que  $G$  est un groupe d'Hurwitz si et seulement s'il est engendré par deux éléments  $x$  et  $y$  vérifiant*

$$x^2 = y^3 = (xy)^7 = 1.$$

- 2) *Dans le cas où  $X$  est une surface hyperelliptique, on peut montrer que l'involution  $\sigma(x, y) = (x, -y)$  est centrale dans  $\text{Aut}(X)$  (On rappelle que l'application  $\widehat{\pi}_P : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  est de degré 2 et qu'elle induit un isomorphisme  $X/\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{C}_\infty$ , voir [Fark] pour plus de détails). Chaque élément de  $\text{Aut}(X)/\langle \sigma \rangle$  peut être ainsi vu comme un élément de  $\text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$  qui laisse stable les points de branchements. Puisque  $\text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$  agit strictement 3-transitivement sur  $\mathbb{C}_\infty$  (i.e pour tout couple de triplets  $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$  d'éléments distincts de  $\mathbb{C}_\infty$ , il existe un unique  $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$  tel que  $f(x_i) = y_i$ ), un tel groupe est nécessairement fini. De plus, comme  $\text{Aut}(X)$  est une extension de  $\text{Aut}(X)/\langle \sigma \rangle$  par  $\langle \sigma \rangle$ ,  $\text{Aut}(X)$  est donc nécessairement fini.*

## 2.4 Finitude de $\text{Aut}(X)$ via les groupes fuchsien

Dans cette partie nous parlons très brièvement des groupes fuchsien afin de démontrer entre autre que  $\text{Aut}(X)$  est fini sous les hypothèses du théorème 2.3.1. Nous en profiterons également pour démontrer le "deuxième" théorème d'uniformisation. Nous notons  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$  le demi-plan supérieur.

**Definition 2.4.1.** *Un groupe **fuchsien** est un sous-groupe discret de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .*

**Théorème 2.4.2.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  agissant sur  $\mathbb{H}$ . L'action est proprement discontinue si et seulement si  $\Gamma$  est discret (fuchsien).*

*Démonstration.* (1)  $\implies$  (2).

Raisonnons par contraposée et supposons que  $\Gamma$  n'est pas discret.

Il existe alors une suite  $(T_n)_n$  d'éléments distincts de  $\Gamma$  convergent vers  $id$ . Soit  $p \in \mathbb{H}$  quelconque. En prenant un voisinage  $O$  de  $p$  relativement compact, il existe un entier  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $T_n(O) \cap O \neq \emptyset$ . On en déduit donc que l'action n'est pas proprement discontinue.

(2)  $\implies$  (1).

Supposons  $\Gamma$  discret.

Soient  $K, F$  deux compacts de  $\mathbb{H}$ . Définissons l'application (continue)

$$\varphi : \text{SL}(2, \mathbb{R}) \times F \xrightarrow{p \times id} \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times F \xrightarrow{ev} \mathbb{H}$$

avec  $p$  la projection canonique et  $ev : (A, z) \mapsto A.z$  l'application évaluation.

Montrons que  $E = \{(T, z) \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times F, T.z \in K\}$  est compact en montrant que  $\tilde{E} = (p \times id)^{-1}(E) \subset \text{SL}(2, \mathbb{R}) \times F$  est compact, ce qui permettra d'en déduire que  $\{T \in \Gamma, T(F) \cap K \neq \emptyset\}$  est fini par hypothèse sur  $\Gamma$ .

Remarquons premièrement que  $\tilde{E}$  est fermé, montrons également qu'il est borné.

Par compacité de  $K$  et de  $F$ , et par continuité de  $\varphi$ , il existe deux constantes  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  telles que  $|\varphi(\tilde{E})| \leq C_1$  et  $\Im(\varphi(\tilde{E})) \geq C_2$ . Autrement dit, pour  $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) \in \tilde{E}$ , on a  $|\frac{az+b}{cz+d}| \leq C_1$  et  $\frac{\Im(z)}{|cz+d|^2} \geq C_2$ . La deuxième condition implique que  $c$  et  $d$  sont bornés, et cela entraîne via la première condition que  $a$  et  $b$  sont bornés. Ceci achève la preuve.  $\square$

**Remarque 2.4.3.** *Nous en déduisons immédiatement que si  $K \leq \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  est un groupe fuchsien, alors  $\mathbb{H}/K$  est munie d'une structure de surface de*

Riemann rendant la projection canonique  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/K$  holomorphe.  
 Nous rappelons également que  $\text{Aut}(\mathbb{H}) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  via l'action de groupe :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

**Théorème 2.4.4** (Uniformisation des surfaces connexes version 2). *Toute surface de Riemann connexe  $X$  est biholomorphe à une des surfaces suivantes:  $\mathbb{C}, \mathbb{C}^*$ , un tore complexe  $\mathbb{C}/\Lambda$ , la sphère de Riemann  $\mathbb{C}_\infty$  ou  $\mathbb{H}/K$  avec  $K$  un groupe fuchsien agissant librement sur  $\mathbb{H}$ .*

*Démonstration.* Soit  $X$  une surface de Riemann. Notons  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un revêtement universel. La théorie des revêtements assure que le groupe d'automorphismes de  $p$  (qu'on note  $A(p)$ ) agit proprement discontinuement et librement sur  $\tilde{X}$  et induit un homéomorphisme  $\bar{p} : \tilde{X}/A(p) \rightarrow X$  (on pourra consulter [Live] si besoin).

Par définition de  $p$  et de  $X$ , le lemme 4.1.2 et le théorème 2.2.2 assurent que  $\bar{p}$  est en fait un biholomorphisme entre surfaces de Riemann.

De plus, le premier théorème d'uniformisation (théorème 1.1.18) assure que  $\tilde{X}$  est isomorphe à  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}^*$  (ou  $\mathbb{H}$ ) ou à  $\mathbb{C}_\infty$ .

- Si  $\tilde{X} = \mathbb{C}_\infty$ , alors comme l'application  $\pi : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty/A(p)$  est holomorphe et non-constante entre surfaces de Riemann compactes, le corollaire 1.1.21 assure donc que  $g(\mathbb{C}_\infty/A(p)) = 0$  et donc  $X \cong \mathbb{C}_\infty$ .
- Si  $\tilde{X} = \mathbb{C}$  alors  $A(p)$  est un sous-groupe des transformations affines de  $\mathbb{C}$ . Comme l'action est sans point fixe, les éléments de  $A(p)$  sont des translations. Comme de plus l'action est proprement discontinue,  $A(p)$  s'identifie donc comme un sous-groupe additif discret de  $\mathbb{C}$ . Si le rang de  $A(p)$  est nul alors  $X \cong \mathbb{C}$ . Si  $A(p)$  est monogène donc de la forme  $w\mathbb{Z}$  alors  $X \cong \tilde{X}/A(p)$  est isomorphe à  $\mathbb{C}^*$  via  $z \in \mathbb{C}/w\mathbb{Z} \mapsto e^{2i\pi z/w} \in \mathbb{C}^*$ . Enfin, si  $A(p)$  est de rang 2 alors  $X$  est isomorphe à un tore complexe.
- Si  $\tilde{X} = \mathbb{H}$ , alors le théorème 2.4.2 assure que  $A(p)$  est un groupe fuchsien qui de plus agit librement sur  $\mathbb{H}$ .

□

**Remarque 2.4.5.** *Supposons que  $X$  est compacte de genre  $\geq 2$ . D'après le théorème 1.1.14,  $X$  est homéomorphe à la somme connexe de  $g$  tores.*

En utilisant le théorème de de van Kampen (voir la section 4.2 ), on peut montrer que

$$\pi_1(X) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle.$$

De plus, la théorie des revêtements assure que  $A(p) \cong \pi_1(X)$  (par simple connexité de  $\tilde{X}$ ). Le groupe  $A(p)$  est donc non abélien.

**Lemme 2.4.6.** *Soit  $K$  un groupe fuchsien. Notons  $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/K$  la projection canonique. Supposons qu'il existe  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ , deux automorphismes de  $\mathbb{H}$ , tels que  $\pi \circ \tilde{f}_1 = \pi \circ \tilde{f}_2$ . Alors  $\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2^{-1} \in K$ .*

*Démonstration.* Si  $\pi \circ \tilde{f}_1 = \pi \circ \tilde{f}_2$ , alors pour tout  $z \in \mathbb{H}$ , il existe  $k_z \in K$  tel que  $\tilde{f}_1.z = k_z.\tilde{f}_2.z$ . Cela induit donc l'application

$$z \in \mathbb{H} \mapsto k_z \in K.$$

Comme  $K$  est dénombrable, au moins une fibre de cette application est non-dénombrable. Autrement dit il existe  $k \in K$  tel que l'ensemble  $\{z \in \mathbb{H}, \tilde{f}_1.z = k.\tilde{f}_2.z\}$  est non-dénombrable donc admet un point d'accumulation. Par connexité de  $\mathbb{H}$ , on a  $\tilde{f}_1 = k \circ \tilde{f}_2$  et on en déduit le résultat.  $\square$

**Théorème 2.4.7.** *Soit  $X$  une surface de Riemann isomorphe à  $\mathbb{H}/K$ , avec  $K$  un groupe fuchsien  $K \leq \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , alors  $\text{Aut}(X) \cong N(K)/K$  avec  $N(K) = \{g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}), gKg^{-1} = K\}$  désignant le normalisateur de  $K$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* On suppose donc que  $X = \mathbb{H}/K$ . Notons  $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/K$  la projection canonique. Soit  $f \in \text{Aut}(X)$ . L'application  $f \circ \pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/K$  étant un revêtement simplement connexe, il existe alors un biholomorphisme  $\tilde{f} \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  tel que  $f \circ \pi = \pi \circ \tilde{f}$  (voir la fin de la section 4.1). Pour tout  $k \in K$ , pour tout  $z \in H$ , on a

$$\pi \circ \tilde{f} \circ k \circ \tilde{f}^{-1}(z) = f \circ \pi \circ k \circ \tilde{f}^{-1}(z) = f \circ \pi \circ \tilde{f}^{-1}(z) = \pi(z).$$

On en déduit alors par le lemme précédent que  $\tilde{f} \in N(K)$ . Cela induit donc un morphisme de groupes  $f \in \text{Aut}(X) \mapsto \tilde{f}K \in N(K)/K$  (qui est bien défini en utilisant encore le lemme précédent).

Si  $\tilde{f}K = K$  alors  $\tilde{f} \in K$  et donc  $f = id$  (car  $f \circ \pi = \pi \circ \tilde{f}$ ). Ce morphisme est donc bien injectif. Pour la surjectivité, soit  $\tilde{g} \in N(K)$  arbitraire. Par la propriété universelle du quotient, il existe  $g : \mathbb{H}/K \rightarrow \mathbb{H}/K$  bijective telle que  $g \circ \pi = \pi \circ \tilde{g}$ . Comme l'application  $\pi$  est un biholomorphisme local,  $g$  est en fait un automorphisme de  $\mathbb{H}/K$ .  $\square$

**Lemme 2.4.8.** *Soit  $K$  un groupe fuchsien non abélien.  $N(K)$  est également un groupe fuchsien.*

Un résultat de théorie des groupes nous dit que deux éléments distincts de l'identité dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  commutent si et seulement si ils ont exactement les mêmes points fixes (sur  $\mathbb{H}$ ). On pourra consulter [Cejk] si besoin. Nous nous appuyons sur ce résultat pour démontrer le lemme ci-dessus.

*Démonstration du lemme 2.4.8.* .

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite  $(g_n)_n \in N(K)^{\mathbb{N}}$  convergente vers  $id$ . Pour tout  $h \in K$ , la suite  $(g_n h g_n^{-1})_n$  est à valeurs dans  $K$ , et converge vers  $h$ . Mais comme  $K$  est discret, cette suite est stationnaire, donc pour  $n$  grand,  $g_n$  et  $h$  commutent et fixes donc les mêmes points sur  $\mathbb{H}$ .  $h$  étant arbitraire, on en déduit que deux éléments quelconques de  $K$  auraient les mêmes points fixes et donc commuteraient ce qui est absurde par hypothèse sur  $K$ . Ceci achève la preuve du lemme.  $\square$

Nous y sommes presque... Avant de démontrer que  $\mathrm{Aut}(X)$  est fini, introduisons un tout dernier concept.

**Definition 2.4.9** (Domaine fondamental). *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Un **domaine fondamental** pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}$  est un sous-ensemble  $F \subset \mathbb{H}$  fermé tel que :*

- $\overline{\mathring{F}} = F$ .
- $\mathbb{H} = \bigcup_{T \in \Gamma} T(F)$ .
- Pour tout  $T \in \Gamma \setminus \{id\}$ ,  $\mathring{F} \cap T(\mathring{F}) = \emptyset$ .

L'aire hyperbolique d'un sous-ensemble  $A \subset \mathbb{H}$  est définie par la quantité

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx dy}{y^2}.$$

Supposons que  $F_1, F_2 \subset \mathbb{H}$  sont deux domaines fondamentaux d'un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Nous avons alors

$$\mu(F_1) = \sum_{T \in \Gamma} \mu(F_1 \cap T(F_2)) = \sum_{T \in \Gamma} \mu(T^{-1}(F_1) \cap F_2) = \mu(F_2).$$

De plus, si  $\Gamma$  est un groupe fuchsien, nous pouvons montrer que l'ensemble

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}, d(z, p) \leq d(T(z), p), \text{ pour tout } T \in \Gamma\}$$

est un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}$ , avec  $p \in \mathbb{H}$  et  $d$  la distance hyperbolique sur  $\mathbb{H}$  définie à l'aide de la métrique hyperbolique

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

On pourra consulter [Kato] pour une preuve de ce résultat. Les ensembles  $D_p(\Gamma)$  sont appelées les **régions de Dirichlet**.

Nous pouvons ainsi associer à tout groupe fuchsien  $\Gamma$  la quantité  $\mu(F)$  (qu'on notera simplement  $\mu(\Gamma)$ ) avec  $F \subset \mathbb{H}$  un domaine fondamental quelconque pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}$ .

Dans [Kato], il est également démontré que  $\mathbb{H}/\Gamma$  est compact si et seulement si chaque région de Dirichlet  $D_p(\Gamma)$  est compacte.

Enfin, si  $\Lambda$  est un sous-groupe de  $\Gamma$ , nous affirmons que

$$\mu(\Lambda) = |\Gamma : \Lambda| \mu(\Gamma) \tag{1}$$

(on pourra voir la démonstration de cette relation en annexe : 4.3).

*Démonstration (suite) du théorème d'Hurwitz 2.3.1. .*

Montrons maintenant que  $\text{Aut}(X)$  est fini. D'après le théorème d'uniformisation 2.4.4, on a  $X \cong \mathbb{H}/K$  avec  $K$  un groupe fuchsien agissant librement sur  $\mathbb{H}$ . Maintenant,

- $K$  est non abélien par la remarque 2.4.5 .
- $N(K)$  est un groupe fuchsien d'après le lemme 2.4.8 .
- Le théorème 2.4.7 assure que  $\text{Aut}(X) \cong N(K)/K$ .

De plus, par compacité de  $X$ ,  $\mu(K) < \infty$  et donc de même  $\mu(N(K)) < \infty$  par la relation 1 .

Finalement,  $|\text{Aut}(X)| = |N(K) : K| = \frac{\mu(K)}{\mu(N(K))} < \infty$ . □

**Remarque 2.4.10.** Notons que  $\mu(N(K)) > 0$ . En effet, en notant  $F$  un domaine fondamental de  $N(K)$ , si nous avons  $\mu(F) = 0$ , alors  $F$  serait d'intérieur vide et donc  $F$  serait vide (car  $\overline{\overline{F}} = F$ ).

L'égalité  $\mathbb{H} = \bigcup_{T \in N(K)} T(F)$  ne serait alors pas vérifiée.

### 3 Exemples d'actions de groupes finis et compléments

Dans cette section nous allons étudier quelques exemples d'actions de groupes finis sur des surfaces compactes de genre  $g$  différents (0 à 3).

Pour les cas  $g = 0$  et  $g = 1$ , nous examinerons les différentes situations possibles du lemme 2.2.5 (le petit (a) et le petit (b) du lemme). Nous en profiterons également pour calculer explicitement certains points de ramifications en guise d'exemple.

Le cas  $g = 2$  sera consacré (simplement et sans calculs) à l'énumération des différents groupes possibles agissant sur une surface hyperelliptique.

Et enfin, le cas  $g = 3$  qui comme annoncé dans l'introduction, sera consacré à l'étude de la quartique de Klein.

#### 3.1 Actions sur la sphère de Riemann ( $g=0$ )

Commençons tout doucement par s'occuper des actions sur la sphère de Riemann  $\mathbb{C}_\infty$ .

Pour  $G$  un groupe fini agissant holomorphiquement et de manière effective sur  $\mathbb{C}_\infty$ , puisque  $\mathbb{C}_\infty$  est de genre 0, alors il en va de même pour  $\mathbb{C}_\infty/G$  (d'après le corollaire 1.1.21) donc d'après la formule des genres (corollaire 2.2.4) nous obtenons

$$-2 = |G|(R - 2),$$

où  $R = \sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{r_i})$  avec  $r_1, \dots, r_k$  les différents indices de ramification des points de branchements  $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{C}_\infty/G$ . Nous avons  $R < 2$  donc on se retrouve dans le cas (a) du lemme 2.2.5 (et donc nécessairement  $k \leq 3$ ).

Pour rappel, l'ensemble des automorphismes de  $\mathbb{C}_\infty$  est l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C}_\infty \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \in \mathbb{C}_\infty, ad - bc \neq 0\},$$

ce qui induit le morphisme surjectif

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mapsto (z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty).$$

En remarquant que le noyau de ce morphisme est exactement le sous-groupe des homothéties, nous avons donc par passage au quotient un isomorphisme

$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ . Le groupe  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$  agit ainsi (par homographie) holomorphiquement et de manière effective sur  $\mathbb{C}_\infty$  :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Rappelons également le théorème de **Dickson** : tout sous-groupe fini de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$  est isomorphe à l'un des cinq groupes suivants :  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $D_{2r}$ ,  $\mathfrak{A}_4$ ,  $\mathfrak{S}_4$  ou  $\mathfrak{A}_5$ . Nous nous intéresserons aux quatre derniers.

1) **Action de  $D_{2r}$  sur  $\mathbb{C}_\infty$ .**

$D_{2r}$  a pour présentation  $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^r = \beta^2 = 1, \beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^{-1} \rangle$ .

On peut alors vérifier sans difficulté que  $D_{2r} \cong \langle e^{2i\pi/r}z, 1/z \rangle$  ( $e^{2i\pi/r}z$  et  $1/z$  sont deux éléments de  $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ ).

Pour trouver des points de branchements de l'application quotient, il suffit de trouver des points  $z \in \mathbb{C}_\infty$  tels que leur sous-groupe stabilisateur  $G_z$  est non trivial. Cherchons par exemple des points fixes de  $\alpha = e^{2i\pi/r}z, \beta = 1/z$  et  $\alpha\beta$ .

- $\alpha.z = z \iff \exp(2\pi i/r)z = z \iff z \in \{0, \infty\}$  (Notons que  $\infty$  appartient à la même orbite que celle de 0).  
On vérifie ensuite que  $G_0 = \langle \alpha \rangle$ , qui est de cardinal  $r$ .  
Ainsi, le point  $D_{2r}.0 \in \mathbb{C}_\infty/D_{2r}$  est un point de branchement avec indice de ramification égal à  $r$ .
- $\beta.z = z \iff 1 = z^2 \iff z \in \{-1, 1\}$  (Notons que  $-1$  appartient à la même orbite que celle de 1 pour  $r$  pair).  
On vérifie ensuite que  $G_1 = \langle \beta \rangle$ , qui est de cardinal 2.  
Ainsi, le point  $D_{2r}.1 \in \mathbb{C}_\infty/D_{2r}$  est un point de branchement avec indice de ramification égal à 2.
- $(\alpha\beta).z = z \iff \exp(2\pi i/r) = z^2 \iff z \in \{\exp(\pi i/r), -\exp(\pi i/r)\}$  (Notons que ces deux points appartiennent à la même orbite si  $r$  est pair). Comme précédemment, on vérifie que  $G_{\exp(\pi i/r)} = \langle \alpha\beta \rangle$  de cardinal 2 (car l'orbite de  $\exp(\pi i/r)$  est l'ensemble  $\exp(\pi i/r)\mathbb{U}_r$  de cardinal  $r$ ).  
Ainsi, le point  $D_{2r}.\exp(\pi i/r) \in \mathbb{C}_\infty/D_{2r}$  est un point de branchement avec indice de ramification égal à 2.

On vient de montrer que les points  $D_{2r}.0, D_{2r}.1$  et  $D_{2r}.\exp(\pi i/r)$  sont trois points de branchements de l'application quotient avec indice de ramification  $2,2,r$ . Par le lemme 2.2.5, on en déduit que ce sont les seuls points de branchements de l'application quotient.

2) **Action de  $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4$  et  $\mathfrak{A}_5$  sur  $\mathbb{C}_\infty$ .**

On va tâcher d'aller un peu plus vite que dans l'exemple précédent. On rappelle la présentation des groupes  $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4$  et  $\mathfrak{A}_5$ :

$$\mathfrak{A}_4 = \langle \alpha, \beta | \alpha^3 = \beta^2 = (\alpha\beta)^3 = 1 \rangle,$$

$$\mathfrak{S}_4 = \langle a, b | a^4 = b^2 = (ab)^3 = 1 \rangle,$$

$$\mathfrak{A}_5 = \langle a, b | a^5 = b^2 = (ab)^3 = 1 \rangle.$$

On choisit alors deux automorphismes de  $\mathbb{C}_\infty$  pour chaque groupe qui vérifient les conditions pour y être isomorphe : pour l'élément  $\alpha$  d'ordre 3, 4 ou 5 il suffit de prendre  $\alpha = e^{2i\pi/k}z$ , avec  $k \in \{3, 4, 5\}$ . Pour trouver l'élément  $\beta$  d'ordre 2 on s'aperçoit déjà que cet élément est de la forme  $\frac{az+b}{cz-a}$  (car sa représentation matricielle dans  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$  doit être de trace nulle) et la condition  $(\alpha\beta)^3 = 1$  donne des conditions sur  $a, b$  et  $c$ . On obtient alors les générateurs suivants (non uniques) :

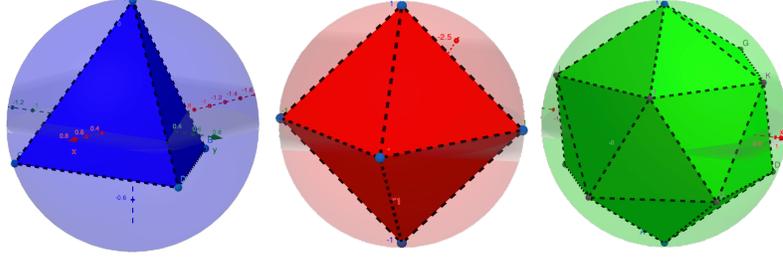
$$\mathfrak{A}_4 \cong \langle e^{2i\pi/3}z, \frac{\sqrt{2}-z}{\sqrt{2}z+1} \rangle,$$

$$\mathfrak{S}_4 \cong \langle iz, \frac{z+1}{z-1} \rangle,$$

$$\mathfrak{A}_5 \cong \langle e^{2i\pi/5}z, \frac{z+\lambda}{\lambda z-1} \rangle, \lambda = \sqrt{1-2\cos(2\pi/5)}.$$

Le point 0 est un point fixe pour  $e^{2i\pi/k}z$  ( $k \in \{3, 4, 5\}$ ), son sous-groupe stabilisateur est d'ordre  $k$ . Pour conclure, il suffit maintenant (encore une fois d'après le lemme 2.2.5) de trouver un point  $z \in \mathbb{C}_\infty$  ayant comme sous-groupe stabilisateur  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  ce qui est le cas car  $\alpha\beta$  est d'ordre 3 qu'importe le groupe choisi (trouver un point fixe de  $\alpha\beta$  se traite en résolvant une équation de degré 2 dans  $\mathbb{C}$ ).

Phénomène surprenant (ou pas ?), on peut calculer explicitement les orbites de certains points de ramifications, les ramener dans  $\mathbb{S}^2$  via l'application réciproque de la projection stéréographique et obtenir de jolis solides réguliers comme sur la figure suivante :



Les trois solides ci-dessus (le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre ) correspondent à l'orbite de  $\infty$  sous l'action de  $\mathfrak{A}_4$ ,  $\mathfrak{S}_4$  et  $\mathfrak{A}_5$  (respectivement). À noter que 0 appartient à l'orbite de  $\infty$  dans les deux derniers cas, si nous avions pris l'orbite de 0 pour le premier, nous aurions obtenu le même tétraèdre mais à l'envers.

### 3.2 Actions sur un tore complexe ( $g=1$ )

Soit  $\mathbb{C}/\Lambda$  un tore complexe avec  $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$  un réseau de  $\mathbb{C}$ . Avant de s'attaquer aux actions de groupes sur  $\mathbb{C}/\Lambda$ , essayons déjà de classifier les automorphismes de ce dernier.

**Proposition 3.2.1.** *Soient deux tores  $\mathbb{C}/\Lambda_1$  et  $\mathbb{C}/\Lambda_2$ . Les fonctions holomorphes (non-constantes)  $f : \mathbb{C}/\Lambda_1 \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_2$  sont exactement les applications  $f_{a,b} : [z]_1 \in \mathbb{C}/\Lambda_1 \mapsto [az + b]_2 \in \mathbb{C}/\Lambda_2$  avec  $a, b \in \mathbb{C}$  et  $a\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ .*

*Démonstration.* Notons  $\pi_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_i$  la projection canonique (qui est aussi l'unique revêtement universel de  $\mathbb{C}/\Lambda_i$  à isomorphisme près). Soit  $f : \mathbb{C}/\Lambda_1 \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_2$  holomorphe. L'application  $f \circ \pi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_2$  est un revêtement universel de  $\mathbb{C}/\Lambda_2$ . Il existe alors un isomorphisme de revêtement  $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tel que  $f \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \tilde{f}$ . Nous en déduisons alors que  $\tilde{f}$  est un biholomorphisme (voir la fin de la section 4.1) donc de la forme  $\tilde{f}(z) = az + b$  et ainsi  $f = f_{a,b}$ . De plus, pour tout  $\omega \in \Lambda_1$ ,  
 $f([z + \omega]_1) = f([z]_1) \implies [az + b + a\omega]_2 = [az + b]_2 \implies a\omega \in \Lambda_2$ .  
Réciproquement, comme  $\pi_i$  est un biholomorphisme local, on en déduit directement que  $f_{a,b}$  est holomorphe.  $\square$

**Corollaire 3.2.2.**  *$f_{a,b}$  est un isomorphisme si et seulement si  $a\Lambda_1 = \Lambda_2$ .*

*Démonstration.* ( $\implies$ ) Si  $f_{a,b}$  est un isomorphisme, alors en notant  $f_{c,d}$  son inverse, comme  $f_{a,b}(f_{c,d}([z]_2)) = [z]_2$ , alors  $z(ac - 1) + b + ad \in \Lambda_2$ , pour tout

$z \in \mathbb{C}$ . Comme  $\Lambda_2$  est discret, par un argument de connexité, l'application

$$z \in \mathbb{C} \mapsto z(ac - 1) + b + ad + \text{constante} \in \mathbb{C}$$

est constante sur  $\mathbb{C}$  ce qui implique que  $c = a^{-1}$  et donc par hypothèse sur les inclusions nous avons  $a\Lambda_1 = \Lambda_2$ .

( $\Leftarrow$ ) Réciproquement si  $a\Lambda_1 = \Lambda_2$  alors  $a^{-1}\Lambda_2 \subset \Lambda_1$  donc l'application  $f_{a^{-1}, -a^{-1}b}$  est holomorphe et est l'inverse de  $f_{a,b}$ .  $\square$

**Remarque 3.2.3.** *Nous pouvons de plus montrer dans le cas d'un automorphisme de  $\mathbb{C}/\Lambda$  que  $|a| = 1$ . En effet, comme  $\mathbb{C}/\Lambda$  est discret, en considérant  $\omega \in \Lambda \setminus \{0\}$  de module minimal, nous avons alors  $|\omega| \leq |a\omega|$  et  $|\omega| \leq |a^{-1}\omega|$  ce qui implique que  $|a| = 1$ .*

Notons  $T \subset \text{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$  le sous-groupe (infini) engendré par les translations ( $[z] \mapsto [z + b]$ ) avec  $b \in \mathbb{C}$ . Notons également  $\text{Aut}_0(\mathbb{C}/\Lambda)$  le sous-groupe engendré par les automorphismes fixant 0 ( $[z] \mapsto [az]$ ). Le sous-groupe  $T$  est distingué dans  $\text{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$  et par le lemme précédent,  $\text{Aut}_0(\mathbb{C}/\Lambda)$  est un complément de  $T$  dans  $\text{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ . La théorie des groupes assure donc que

$$\text{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda) = T \rtimes \text{Aut}_0(\mathbb{C}/\Lambda).$$

De plus, nous avons le résultat suivant :

**Lemme 3.2.4.**  *$\text{Aut}_0(\mathbb{C}/\Lambda)$  est un groupe cyclique d'ordre 2, 4 ou 6.*

*Démonstration.* Soit  $f : [z] \mapsto [az]$  un élément de  $\text{Aut}_0(\mathbb{C}/\Lambda)$ . Prenons  $w \in \Lambda \setminus \{0\}$  de module minimal. Par la remarque 3.2.3, on a dans un premier temps  $|a| = 1$ . Excluons déjà le cas  $a = \pm 1$  qui est trivial. Puisque  $a \neq \pm 1$  et  $a\Lambda = \Lambda$ , alors  $\langle \omega, a\omega \rangle = \Lambda$  et  $a^2\omega \in \Lambda$ . Il existe alors deux entiers  $m$  et  $n$  tels que  $a^2\omega = ma\omega + n\omega$  et donc  $a^2 = ma + n$ . Les coefficients  $m$  et  $n$  du polynôme  $z^2 - mz - n$  correspondant respectivement à la somme et aux produits des racines du polynôme (qui sont de module 1), nous avons  $|m| \leq 2$  et  $|n| = 1$ .  $a$  appartient donc soit à  $\mathbb{U}_4$  ou à  $\mathbb{U}_6$ .  $\square$

**Remarque 3.2.5.**  *$\text{Aut}_0(\mathbb{C}/\Lambda)$  est en fait isomorphe à*

- $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  si  $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$ .
- $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  si  $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus e^{2i\pi/6}\mathbb{Z}$ .

- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sinon.

Nous voyons donc qu'en prenant  $\Lambda = \langle 1, e^{2i\pi/6} \rangle$  hexagonal,  $\mathbb{C}/\Lambda$  n'est pas isomorphe à  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$ . De manière générale, en notant  $\Lambda = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$  tel que  $\Im(\omega_1/\omega_2) > 0$ , la courbe  $\mathbb{C}/\Lambda$  est isomorphe à  $\mathbb{C}/\Lambda'$  si et seulement si  $\tau = (a\tau' + b)/(c\tau' + d)$  avec  $(\tau, \tau') = (\omega_1/\omega_2, \omega'_1/\omega'_2)$  et  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  (voir le livre de R.Miranda [Mira] si besoin).

Revenons en aux actions de groupes.

Soit  $G$  un groupe fini agissant holomorphiquement et de manière effective sur un tore complexe  $\mathbb{C}/\Lambda$  (de genre 1). Notons encore  $R = \sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{r_i})$ . Par la remarque 1.1.22, s'il existe des sous-groupes stabilisateurs de  $G$  non triviaux, alors l'application canonique  $\mathbb{C}/\Lambda \rightarrow (\mathbb{C}/\Lambda)/G$  est ramifiée et donc nécessairement  $g((\mathbb{C}/\Lambda)/G) = 0$ . Par la formule des genres, on en déduit également que  $R = 2$ .

- 1) cas  $k = 3, \{r_i\} = \{2, 3, 6\}$ .

On considère l'action de  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{C}/\Lambda$  avec  $\Lambda = \mathbb{Z} + e^{2i\pi/6}\mathbb{Z}$ :

$$G = \langle \sigma \rangle \text{ avec } \sigma.z = e^{2i\pi/6}z \text{ d'ordre } 6.$$

Le point  $0 \in \mathbb{C}/\Lambda$  est l'unique point fixe de  $\sigma$

Le point  $w = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}(1 + e^{2i\pi/6})$  est un point fixe de  $\sigma^2$ . Tous les autres points fixes non nuls de  $\sigma^2$  appartiennent en fait à la même orbite que  $w$ .

Les points  $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{2i\pi/6}$  et  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2i\pi/6}$  sont les points fixes de  $\sigma^3$ , les trois derniers appartenant à la même orbite qui est encore différente des deux dernières.

Les points  $G.0, G.w$  et  $G.\frac{1}{2} \in (\mathbb{C}/\Lambda)/G$  sont donc les points de branchement de l'application quotient avec des indices de ramification respectifs de 6, 3 et 2.

- 2) cas  $k = 3, \{r_i\} = \{2, 4, 4\}$ .

On considère l'action de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$  :

$$G = \langle \sigma \rangle \text{ avec } \sigma.z = iz \text{ d'ordre } 4.$$

Les points  $0$  et  $\frac{1}{2}(1+i)$  sont les deux points fixes de  $\sigma$  et appartiennent à des orbites distinctes.

Les points  $0, 1/2, 1/2i$  et  $\frac{1}{2}(1+i)$  sont les quatre points fixes de  $\sigma^2$  ( $1/2$  et  $1/2i$  appartiennent à la même orbite qui est distincte des deux précédentes).

Les points  $G.0, G.(\frac{1}{2}(1+i)), G.\frac{1}{2} \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i])/G$  sont donc les points de branchement de l'application quotient avec des indices de ramification respectifs de  $4, 4$  et  $2$ .

3) cas  $k = 4, \{r_i\} = \{2, 2, 2, 2\}$ .

On considère l'action de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$  :

$$G = \langle \sigma \rangle \text{ avec } \sigma.z = -z + \frac{1}{2} \text{ d'ordre } 2.$$

Les points  $\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i, \frac{3}{4}$  et  $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}i$  sont les points fixes de  $\sigma$  et appartiennent tous à des orbites distinctes.

Les points  $G.\frac{1}{4}, G.\frac{3}{4}, G.(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i)$  et  $G.(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}i)$  sont donc les points de branchement de l'application quotient avec des indices de ramification respectifs de  $2, 2, 2$  et  $2$ .

4) cas  $k = 3, \{r_i\} = \{3, 3, 3\}$ .

Définissons une action de  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{C}/\Lambda$  avec  $\Lambda = \mathbb{Z} + e^{2i\pi/6}\mathbb{Z}$ . Notons que par définition de  $\Lambda$ , nous avons en fait  $\text{Aut}^0(\mathbb{C}/\Lambda) = \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  avec  $\sigma(z) = e^{2i\pi/6}z$ . Prenons alors par exemple  $(1/2, \sigma^2) \in T \times \text{Aut}^0(\mathbb{C}/\Lambda)$  d'ordre  $3$  et qui agit sur  $\mathbb{C}/\Lambda$  :  $(1/2, \sigma^2).z = 1/2 + \sigma^2(z)$  et  $G = \langle (1/2, \sigma^2) \rangle$ . En procédant de manière analogue aux cas précédents en trouvant des points fixes, on trouve trois points de branchements dans  $(\mathbb{C}/\Lambda)/G$  tels que  $\{r_i\} = \{3, 3, 3\}$ .

### 3.3 Actions sur les surfaces compactes de genre 2

Cette sous-section va être moins calculatoire et plus énumérative que les autres, en raison du fait que certains résultats nécessiteront quelques prérequis comme les diviseurs, le théorème de Riemann-Roch et parfois quelques outils de théorie de Galois, dont nous ne parlerons pas ici. Nous donnerons bien évidemment des références dès lors que nous ne pourrons pas démontrer des résultats via les notions introduites dans la partie 1.

Nous avons déjà le résultat suivant :

**Théorème 3.3.1.** *Toute surface de Riemann compacte de genre 2 est hyperelliptique.*

On pourra consulter [Scha] ou [Bobel] pour une preuve de ce théorème.

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte de genre 2. D'après le théorème d'Hurwitz,  $|\text{Aut}(X)|$  ne peut pas excéder 84. En fait, dans ce cas précis, c'est une inégalité stricte. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un groupe d'Hurwitz (voir remarque 2.3.2) d'ordre 84. C'est le plus petit ordre possible pour être un groupe d'Hurwitz,  $G$  est donc nécessairement simple car s'il existait un sous-groupe distingué non trivial  $H \triangleleft G$ , alors  $G/H$  serait également un groupe d'Hurwitz, plus précisément : si on note  $x$  et  $y$  les générateurs de  $G$  alors en considérant  $\pi : G \rightarrow G/H$  la projection canonique,  $G/H$  serait engendré par  $\pi(x)$  et  $\pi(y)$  qui vérifieraient les relations

$$\pi(x)^2 = \pi(y)^3 = \pi(xy)^7 = 1.$$

$G/H$  serait alors un groupe d'Hurwitz d'ordre strictement inférieur à 84 (absurde).

Le groupe  $G$  serait donc bien simple. Or, le théorème de Sylow assure qu'un groupe d'ordre 84 ne peut pas être simple (voir remarque 3.3.2). On conclut alors que  $|\text{Aut}(X)| < 84$ .

Par ailleurs, à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, O.Bolza a montré explicitement que  $|\text{Aut}(X)| \leq 48$ , et a même démontré que si  $|\text{Aut}(X)| > 2$ , alors  $X$  est conforme à la compactification d'une des six courbes hyperelliptiques suivantes:

$X$	$\text{Aut}(X)$	$ \text{Aut}(X) $
(1) $y^2 = x^6 - 1$	$\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$	24
(2) $y^2 = x^5 - 1$	$\mathbb{Z}_{10}$	10
(3) $y^2 = x(x^4 - 1)$	$\text{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$	48
(4) $y^2 = (x^3 - 1)(x^3 - r^3)$	$D_6$	12
(5) $y^2 = x(x^2 - 1)(x^2 - r^2)$	$D_4$	8
(6) $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - r_1^2)(x^2 - r_2^2)$	$D_2$	4

On pourra se référer au document original de O.Bolza [Bolz], au texte de T.Kuusalo et M. Näätänen [Kuus] ou bien à l'article de S. Allen Broughton [Brou] pour une liste complète de tous les groupes finis agissant fidèlement sur ces dernières.

Dans le prochain paragraphe, on notera abusivement un automorphisme d'une courbe de la forme  $y^2 = P(x)$  (donc de la partie affine) comme un automorphisme du compactifié (quitte à le prolonger).

Notons  $\sigma(x, y) = (x, -y)$  l'involution qui échange les feuilletts pour chaque courbe hyperelliptique.

Pour chaque courbe, on a des automorphismes canoniques qui peuvent dans certains cas engendrer  $\text{Aut}(X)$ , comme par exemple pour la courbe (2), où le groupe d'automorphismes est monogène : engendré par

$$(x, y) \mapsto (e^{2i\pi/5}z, -w)$$

ou bien pour la courbe (5), où le groupe d'automorphismes est engendré par  $\sigma$  et par

$$(x, y) \mapsto (-x, y).$$

Pour le reste, on peut soit voir ce qui se passe au voisinage de l'infini, soit changer de point de vue en étudiant le groupe  $\text{Aut}(X)/\langle\sigma\rangle$  qui s'identifie comme un sous-groupe des homographies de  $\mathbb{C}_\infty$  laissant stable les points de branchements de la projection  $(x, y) \mapsto x$  (voir remarque 2.3.2).

**Remarque 3.3.2.** *Soit  $G$  un groupe d'ordre  $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ . En notant  $n_7(G)$  le nombre de 7-Sylow de  $G$ , alors par Sylow on a  $n_7(G) \mid \frac{84}{7} = 12$  et  $n_7(G) \equiv 1 \pmod{7}$  donc  $n_7(G) = 1$ . Le groupe  $G$  possède un unique 7-Sylow qui est donc distingué. Le groupe  $G$  n'est donc pas simple. On peut raisonner de la même manière pour un groupe d'ordre 42 ou 126.*

### 3.4 Actions sur la quartique de Klein ( $g=3$ )

Soit  $K$  une surface de Riemann compacte de genre 3. Par Hurwitz, nous savons qu'un groupe fini agissant homomorphiquement et de manière effective sur  $K$  a son cardinal borné par  $84(3 - 1) = 168$ . Nous allons voir ici que cette borne peut être atteinte.

Considérons la courbe projective

$$K = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{CP}^2, X^3Y + ZY^3 + XZ^3 = 0\}.$$

Cette courbe est appelée la quartique de Klein. Montrons que  $K$  est bien une surface de Riemann compacte. La compacité de  $K$  est immédiate. Pour que cette courbe soit une courbe lisse sur  $\mathbb{P}^2$ , il faut et il suffit que l'image de cette courbe par chaque carte soit une courbe lisse dans  $\mathbb{C}^2$ .

Sur l'ouvert  $U_x = \{[x : z : y] \in \mathbb{CP}^2, x \neq 0\}$  :

Sur cette ouvert, l'équation se transforme sur  $\mathbb{C}^2$  en l'équation  $z^3 + zy^3 + y = 0$ . Posons  $f(z, y) = z^3 + zy^3 + y$ . En dérivant successivement en  $z$  et en  $y$  on obtient

$$\partial_z f(z, y) = 3z^2 + y^3 \text{ et } \partial_y f(z, y) = 3zy^2 + 1.$$

S'il existe un point  $(z, y)$  annulant les deux dérivées partielles, alors  $3zy^2 + 1 = 0 \implies z = \frac{-1}{3y^2}$ . En remplaçant  $z$  dans l'équation initiale nous obtenons  $\frac{-1}{27y^6} - \frac{y}{3} + y = 0$  donc  $y^7 = \frac{1}{18}$ . Or,  $3z^2 + y^3 = 0 \implies z^2 = -\frac{y^3}{3}$  donc en combinant avec l'équation  $3zy^2 + 1 = 0$  nous obtenons  $y^7 = \frac{-1}{3}$  (absurde). Ainsi,  $z^3 + zy^3 + y = 0$  est bien une courbe lisse sur  $\mathbb{C}^2$ . Les deux autres cas sur les ouverts  $U_y$  et  $U_z$  sont similaires puisque l'on tombe exactement sur la même équation et donc l'équation  $X^3Y + ZY^3 + XZ^3 = 0$  décrit bien une courbe algébrique lisse sur  $\mathbb{CP}^2$ . Notons que  $f$  est irréductible ce qui assure que  $K$  est bien connexe.

Maintenant que nous sommes sous les bonnes hypothèses, montrons que  $G = \text{Aut}(X) = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$  (pour rappel  $\text{Aut}(X)$  est fini car  $g(X) = 3 \geq 2$ .) Extrayons déjà trois automorphismes d'ordre respectivement 2, 3 et 7 (celui d'ordre 2 est tout sauf trivial) :

$$\tau = \frac{i}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} w - w^6 & w^2 - w^5 & w^4 - w^3 \\ w^2 - w^5 & w^4 - w^3 & w - w^6 \\ w^4 - w^3 & w - w^6 & w^2 - w^5 \end{pmatrix},$$

$$\mu([x : y : z]) = [z : x : y],$$

$$\gamma([x : y : z]) = [w^4x : w^2y : wz]$$

avec  $w = e^{2i\pi/7}$ . Nous avons les relations  $\mu^{-1}\gamma\mu = \gamma^2$  et  $\tau^{-1}\mu\tau = \mu^2$ . Ces relations vont être utiles pour le prochain théorème. Les sous-groupes  $\langle \mu, \gamma \rangle$  et  $\langle \mu, \tau \rangle$  sont respectivement isomorphes à  $\mathfrak{S}_3$  et  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

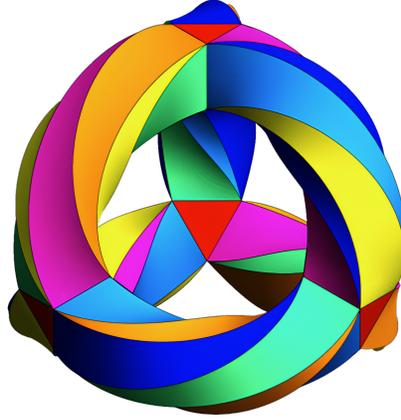


Figure : La quartique de Klein

**Théorème 3.4.1.** *Le groupe  $G$  est un groupe simple à 168 éléments.*

*Démonstration.* La preuve va reposer presque entièrement sur la théorie de Sylow. Soit  $H \triangleleft G$  un sous-groupe distingué.

- Supposons dans un premier temps que 7 divise  $|H|$ . Comme  $H$  est non-trivial, alors  $|H| \in \{7, 21, 42, 82, 14, 28, 56\}$ . Notons  $n_7(G)$  le nombre de 7-Sylow de  $G$ . Le sous-groupe engendré par  $\tau\gamma^5$  est un autre 7-Sylow de  $G$  donc  $n_7(G) > 1$ . Puisque  $H$  est distingué,  $H$  contient tous les 7-Sylow de  $G$ .

Comme  $n_7(G) > 1$ ,  $n_7(G) \equiv 1 \pmod{7}$  et  $n_7(G)$  divise  $\frac{|H|}{7}$  alors nécessairement  $|H| = 56$  et donc également  $G/H \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . De plus, comme  $\tau^{-1}\mu\tau = \tau\mu\tau = \mu^2$  alors  $(\mu\tau)^2 = \mu^3 \in H$ . Et puisque  $G/H \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , alors  $\mu\tau \in H$  et donc  $\mu \in H$  car  $(\tau^3 = \tau \in H)$ , ce qui est absurde car 3 ne divise pas 56.

- Supposons ensuite que 3 divise  $|H|$ . Le sous-groupe  $H$  étant distingué,  $H$  contient tous les 3-Sylows, en particulier donc  $\mu$  et  $\gamma^{-1}\mu\gamma$  appartiennent à  $H$ . De plus, comme  $\mu^{-1}\gamma\mu = \gamma^2$  alors  $u = \gamma^{-1}\mu\gamma\gamma \in H$  et donc  $\gamma \in H$  ce qui est absurde d'après le point précédent.
- Supposons enfin que 2 divise  $|H|$ . D'après les deux points précédents, nous avons alors  $|G/H| = 2^k \cdot 3 \cdot 7$  avec  $k = 0, 1, 2$  ce qui implique que  $n_7(G/H) = 1$  en raisonnant de manière analogue au premier point en utilisant le théorème de Sylow. Prenons maintenant le 7-Sylow

$P = \langle \gamma \rangle$ . En notant  $\pi : G \rightarrow G/H$  la projection canonique,  $\pi(P)$  est un 7-sylow de  $G/H$  donc comme  $n_7(G/H) = 1$  alors  $\pi(P)$  est distingué dans  $G/H$  ce qui implique que  $\pi^{-1}(\pi(P))$  est un 7-sylow distingué dans  $G$  ce qui est absurde car  $n_7(G) > 1$ .

$H$  est donc nécessairement trivial. Ainsi,  $G$  est un groupe simple. De plus, puisque 2,3 et 7 divise  $|G|$  et que  $|G| \leq 168$  par Hurwitz, alors nécessairement  $|G| \in \{42, 84, 126, 168\}$ . Enfin, en raisonnant de manière analogue en utilisant Sylow (par la remarque 3.3.2), on en déduit que  $|G| = 168$ .  $\square$

**Remarque 3.4.2.** *Dans la preuve, nous avons utilisé uniquement les éléments  $\tau, \mu$  et  $\gamma$ . Ainsi, on montre de même que  $\langle \tau, \mu, \gamma \rangle$  est un groupe simple d'ordre 168 et engendre donc  $G$ .*

## 4 Annexe

### 4.1 Revêtements et surfaces de Riemann

Soit  $V$  une variété réelle connexe. La variété  $V$  vérifie toutes les hypothèses du théorème de classification des revêtements connexes (connexe par arcs, localement connexe par arcs et localement simplement connexe) qui assure qu'il y a correspondance biunivoque entre les deux ensembles suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'isomorphismes} \\ \text{de revêtements connexes} \\ F : U \longrightarrow V \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{classes de conjugaisons} \\ \text{de sous-groupes} \\ H \subset \pi_1(V, q) \end{array} \right\}.$$

**Remarque 4.1.1.** *Pour rappel, le théorème indique que la correspondance se fait sur les revêtements **CALCA** (connexe par arcs et localement connexe par arcs). Mais par définition de  $V$ , nous pouvons montrer que  $U$  est CALCA. En effet, en prenant une base dénombrable  $(B_n)_n$  quelconque de  $V$ , nous pouvons supposer sans perte de généralité que chaque  $B_n$  est connexe par arcs et que  $F^{-1}(B_n) = \bigsqcup_{i \in I_n} B_n^i$  avec  $B_n^i$  homéomorphe à  $B_n$  via  $F$ . La famille  $\{B_n^i, n \in \mathbb{N}, i \in I_n\}$  est une base dénombrable d'ouverts connexe par arcs de  $U$ . De manière analogue à montrer qu'une variété connexe est connexe par arcs, on en déduit que  $U$  est connexe par arcs. Finalement, on vient de montrer que  $U$  est naturellement munie d'une structure de variété topologique connexe.*

Dans le cas où  $V$  est une surface de Riemann, nous avons le lemme suivant :

**Lemme 4.1.2.** *Soient  $V$  une surface de Riemann et  $F : U \longrightarrow V$  un revêtement connexe. Il existe une unique structure de surface de Riemann sur  $U$  rendant  $F$  holomorphe.*

*Démonstration.* On équipe  $U$  d'une structure de surface de Riemann rendant  $F$  holomorphe en prenant les cartes suivantes :  $\varphi \circ F|_O : O \longrightarrow \mathbb{C}$  avec  $\varphi$  une carte sur  $V$  et  $O \subset U$  un ouvert tel que  $F|_O : O \longrightarrow F(O) \subset V$  est un homéomorphisme. La compatibilité des cartes sur  $U$  est induite par celle sur  $V$ . On vérifie sans mal que  $U$  est, séparé puisque  $F$  est un revêtement, connexe et à base dénombrable par la remarque 4.1.1. De plus, si  $(\Psi_i, U_i)$  est un atlas sur  $U$  rendant  $F$  holomorphe, alors  $\varphi \circ F|_{U_i} \circ \Psi_i^{-1}$  est holomorphe ce qui assure l'unicité de la structure complexe définie plus haut .  $\square$

On en déduit d'après le lemme précédent que si  $F_i : U_i \longrightarrow V$  ( $i = 1, 2$ ) sont deux revêtements connexes (avec  $V$  une surface de Riemann) appartenant à la même classe d'isomorphismes de revêtements, alors ils sont analytiquement isomorphes puisque  $F_i$  va être un biholomorphisme local via la structure complexe défini plus haut.

## 4.2 Homologie et groupe fondamental du tore à $g$ trous $T_g$ (Rappels)

Pour  $X$  un CW-complexe, notons  $C_*^{CW}(X; R)$  le complexe cellulaire et  $C_*^{sing}(X; R)$  le complexe singulier, avec  $R$  un anneau commutatif quelconque. Nous allons calculer les groupes d'homologie et le groupe fondamental du tore à  $g$  trous  $T_g$ . Rappel :

- $C_n^{CW}(X; R) = H_n^{sing}(X^n, X^{n-1})$  (homologie de  $X^{(n)}$  relativement à  $X^{(n-1)}$ ).
- En notant  $\partial_n : C_n^{sing}(X; R) \longrightarrow C_{n-1}^{sing}(X; R)$  l'application de bord pour l'homologie singulière, l'application de bord pour l'homologie cellulaire est définie comme suit :

$$d_n : H_n^{sing}(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}^{sing}(X^{(n-1)}; R) \xrightarrow{(j_{n-1})^*} H_{n-1}^{sing}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$$

avec  $j_n : X^{(n)} \longrightarrow (X^{(n)}, X^{(n-1)})$  l'inclusion canonique.

- $\forall n \in \mathbb{N}, H_n^{CW}(X; R) \cong H_n^{sing}(X; R)$ .
- $C_n^{CW}(X; R)$  est un  $R$ -module libre de base  $(e_\alpha^n)_{\alpha \in \mathcal{A}_p}$  la famille des  $n$ -cellules ouvertes de dimension  $n$  de  $X$ .

### (1) Homologie cellulaire de $T_g$ .

On peut représenter  $T_g$  à l'aide d'un  $4g$ -gone comme sur l'image suivante, construit par l'attachement successif de tores, chacun représenté par un carré.

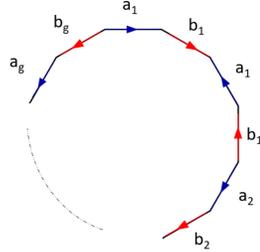


Figure : tore à  $g$  trous  $T_g$

$T_g$  est donc naturellement muni d'une structure de CW-complexe : une 0-cellule  $e^0$  correspondant à tous les sommets du polygone,  $2g$  1-cellules correspondant aux arêtes  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  et une seule 2-cellule  $e^2$  correspondant à l'intérieur du polygone. Par la dernière propriété citée en rappel, nous avons ainsi  $C_n^{CW}(T_g; R) = 0$  pour  $n \geq 3$  et

$$C_0^{CW}(T_g; R) = R, C_1^{CW}(T_g; R) = \bigoplus_{i=1}^{2g} R, C_2^{CW}(T_g; R) = R.$$

Puisque  $T_g$  est connexe par arcs, alors  $R = H_0^{sing}(T_g; R) \cong H_0^{CW}(T_g; R) = C_0^{CW}(T_g; R)/\text{im}(d_1) = R/\text{im}(d_1)$  donc nécessairement  $d_1 = 0$  (et donc  $\ker(d_1) = C_1^{CW}(T_g; R)$ ). Calculons désormais  $d_2$ . Comme  $C_2^{CW}(T_g; R)$  est engendré par la 2-cellule  $e^2$ , il suffit de calculer l'image de  $e^2$  pour connaître  $d_2$ . Or, en triangulant correctement  $e^2$  afin de l'écrire comme union de 2-simplexes, on a alors en tenant compte des orientations des arêtes  $\partial_2(e^2) = 0$  donc  $d_2 = 0$ . On en déduit alors que

$$H_n^{CW}(T_g; R) = \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^{2g} R & \text{si } n = 1. \\ R & \text{si } n = 0, 2. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## (2) Groupe fondamental de $T_g$ .

Nous calculons ici le groupe fondamental de  $T_g$  dans le cas  $g = 2$ . La démonstration dans le cas général est analogue. Commençons par rappeler le théorème de van Kampen :

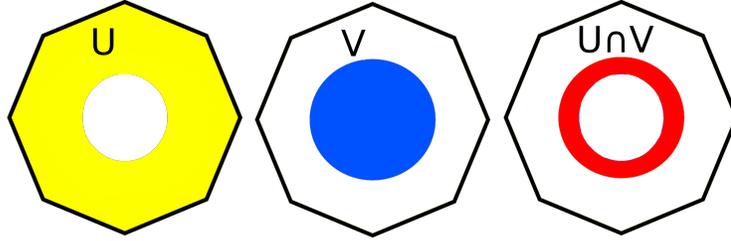
**Théorème 4.2.1** (Théorème de van Kampen). *Soit  $X = U \cup V$  un espace topologique décrit comme union de deux ouverts connexes par*

arcs  $U$  et  $V$  tels que  $U \cap V$  soit également connexe par arcs. Alors pour tout  $z \in U \cap V$ ,

- (i) Le morphisme naturel  $\pi_1(U, z) * \pi_1(V, z) \rightarrow \pi_1(X, z)$  est surjectif.
- (ii) Le noyau du morphisme ci-dessus est le sous-groupe distingué  $N$  engendré par les éléments  $i_1(w) * i_2(w)^{-1}$  du produit libre, avec  $w \in \pi_1(U \cap V, z)$  et  $i_1, i_2$  les inclusions canonique respectives de  $\pi_1(U, z)$  et  $\pi_1(V, z)$  vers  $\pi_1(X, z)$ . Nous avons ainsi un isomorphisme

$$\pi_1(X, z) \cong \frac{\pi_1(U, z) * \pi_1(V, z)}{N}.$$

Prenons désormais  $U$  et  $V$  comme sur le dessin suivant :



Soit  $w \in \pi_1(U \cap V, z)$ .

L'ouvert  $U$  se rétracte sur le bord du polygone donc  $U$  est homotopiquement équivalent à un bouquet de 4 cercles. Le lacet  $w$  est donc homotope dans  $U$  à  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ .

L'ouvert  $V$  est contractile donc le lacet  $w$  est trivial dans  $V$ .

Et enfin l'intersection  $U \cap V$  est homotopiquement équivalent à  $\mathbb{S}^1$  donc  $\pi_1(U \cap V, z) = \mathbb{Z}$ . On en déduit alors que

$$\pi_1(T_2, z) \cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = 1 \rangle.$$

En généralisant pour  $g \geq 2$  quelconque, nous avons ainsi

$$\pi_1(T_g) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle.$$

### 4.3 Démonstration de la relation $\mu(\Lambda) = |\Gamma : \Lambda| \mu(\Gamma)$

Montrons déjà que la mesure  $\mu$ , calculant l'aire hyperbolique d'un sous-ensemble  $A \subset \mathbb{H}$ , est invariante sous l'action  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Soient donc  $A \subset \mathbb{H}$  (qu'on suppose mesurable) et  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

En écrivant  $z = x + iy$  et  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = u(x, y) + iv(x, y)$ , on a grâce aux équations de Cauchy-Riemann :

$$\det(dT(x, y)) = \partial_x u \cdot \partial_y v - \partial_y u \cdot \partial_x v = (\partial_x u)^2 + (\partial_x v)^2 = \frac{1}{|cz + d|^4}.$$

De plus, comme  $v = \frac{y}{|cz+d|^2}$ , alors

$$\mu(T(A)) = \int_{T(A)} \frac{dudv}{v^2} = \int_A \frac{|cz + d|^4}{y^2} \det(dT(x, y)) dx dy = \mu(A).$$

La mesure  $\mu$  est donc bien invariante sous l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Donnons nous un domaine fondamental  $F_\Gamma$  de  $\Gamma$ . En notant une décomposition  $\{\Lambda T_i, i \in I \subset \mathbb{N}\}$  de classes à droite, avec  $T_i \in \Gamma$ , on va montrer que l'ensemble

$$F_\Lambda = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i(F_\Gamma)$$

est un domaine fondamental pour le sous-groupe  $\Lambda$ , ce qui permettra de conclure car nous aurons alors

$$\mu(\Lambda) = \sum_{i \in I} \mu(T_i(F_\Gamma)) = \sum_{i \in I} \mu(F_\Gamma) = |\Gamma : \Lambda| \mu(\Gamma).$$

- On vérifie sans mal que  $\overline{F_\Lambda} = F_\Lambda$ .
- Nous avons  $\mathbb{H} = \bigcup_{S \in \Lambda} S(F_\Lambda)$ .  
En effet, pour tout  $z \in \mathbb{H}$ , il existe  $y \in F_\Gamma$  et  $T \in \Gamma$  tels que  $z = T(y)$ . Il existe également un entier  $i$  tel que  $T \in \Lambda T_i$  donc il existe  $S \in \Lambda$  tel que  $z = S(w)$  avec  $w = T_i(y) \in F_\Lambda$ .
- Nous avons  $F_\Lambda \cap S(F_\Lambda) = \emptyset$ , pour tout  $S \neq id$ .  
En effet, s'il existait un élément  $z = S(y)$  appartenant à  $F_\Lambda \cap S(F_\Lambda)$  avec  $S \in \Lambda \setminus \{id\}$ , il existerait deux entiers  $i$  et  $j$  tels que  $(z, y) \in$

$T_i(F_\Gamma) \times T_j(F_\Gamma)$ . Puisque  $\mathring{F}_\Gamma \cap T(\mathring{F}_\Gamma) = \emptyset$ , pour tout  $T \neq id$ , alors nécessairement  $T_i = ST_j$  et puisque  $T_i$  et  $T_j$  appartiennent à la même classe à droite, alors  $i = j$  (absurde par la relation  $\mathring{F}_\Gamma \cap T(\mathring{F}_\Gamma) = \emptyset$ ).

## References

- [Mira] R.Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society, 1995.
- [Dolg] I. Dolgachev, *Topics in Classical Algebraic Geometry, Part I*, 2014.
- [Faul] Eivind Fauli, *Thesis on Knot Theory*, 2021.
- [Berg] N.Begeron, A.Guilloux, *Introduction aux surfaces de Riemann*.
- [Nima] N.Anvari, *Automorphisms of Riemann surfaces*, August 2009.
- [Cejk] N.Cejka, *Jørgensen Lemma*, 2016.
- [Favr] Charles Favre, *Surfaces de Riemann et théorie des revêtements*.
- [Live] M.Livernet, *Topologie algébrique*, cours ENS Paris.
- [Rydh] J.Rydholm, *Classification of Compact Orientable Surfaces using Morse Theory*, August 2016.
- [Fark] H.M. Farkas, I. Kra, *Riemann Surfaces (second edition)*.
- [Thom] Carsten Thomassen, *The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces*, 1992.
- [Fisc] G.Fischer, *Plane Algebraic Curves*, American Mathematical Society, 1994.
- [Kato] S.Katok, *Fuchsian Groups*, 1992.
- [Unif] Henri Paul de Saint-Gervais, *Uniformisation des surfaces de Riemann*.
- [Tele] C. Teleman, *Riemann Surfaces*, 2003.
- [Scha] Paul Schmutz Schaller, *Geometric characterization of hyperelliptic Riemann surfaces*.
- [Bobe] Alexander I. Bobenko, *Introduction to Compact Riemann Surfaces*.
- [Macb] A.M.Macbeath, *On a theorem of Hurwitz*, 1960.

- [Bolz] O.Bolza, *On Binary Sextics with Linear Transformations into Themselves*.
- [Kuus] T.Kuusalo, M. Näättänen, *Geometric uniformization in genus 2*, 1995.
- [Brou] S. Allen Broughton, *Classifying finite group actions on surfaces of low genus*, 1990.